# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

# Forma normale al secondo ordine

# di una catena di Fermi - Pasta - Ulam

Relatore

Prof. Antonio Ponno

Laureanda

Gaia Marangon

Anno Accademico 2018/2019

# Indice

**Introduzione** **iv**

**1 Impostazione generale del problema** **1**
1.1 Descrizione del sistema . . . . . . . . . . 1
1.2 Obiettivi e congetture . . . . . . . . . . 2
1.3 Cenni di teoria perturbativa . . . . . . . . . . 3

**2 Primo ordine** **5**
2.1 Descrizione del termine al primo ordine . . . . . . . . . . 5
2.2 Prima equazione . . . . . . . . . . 6
2.3 Seconda equazione . . . . . . . . . . 6
2.4 Terza equazione . . . . . . . . . . 7
2.5 Risultato del conto . . . . . . . . . . 8

**3 Generatrice** **9**

**4 Secondo ordine** **11**
4.1 Descrizione del termine al secondo ordine . . . . . . . . . . 11
4.2 Prima equazione . . . . . . . . . . 14
4.3 Seconda equazione . . . . . . . . . . 14
4.4 Terza equazione . . . . . . . . . . 16
4.5 Quarta equazione . . . . . . . . . . 17
4.6 Quinta equazione . . . . . . . . . . 17
4.7 Sesta equazione . . . . . . . . . . 19
4.8 Ricostruzione del risultato finale . . . . . . . . . . 20

**Conclusioni** **24**

**Bibliografia** **25**

# Introduzione

Negli anni quaranta Fermi decise di sfruttare i computer - all'epoca una novità tecnologica - per studiare numericamente una selezione di problemi, privi di soluzione analitica, con la speranza che i risultati numerici potessero facilitare lo sviluppo di una futura teoria. In particolare il suo interesse era rivolto a modelli rappresentanti sistemi fisici non lineari, con l'obiettivo di indagare fenomeni come turbolenze, mixing o termalizzazione, prima in sistemi estremamente semplificati e poi in sistemi di complessità e generalità sempre maggiore. Sin dal primo caso studiato, tuttavia, emersero risultati inaspettati, che posero le basi di quello che è oggi noto come il problema di Fermi - Pasta - Ulam (e Tsingou).

Il primo problema studiato fu un sistema unidimensionale di 64 particelle, ciascuna interagente con le prime vicine tramite forze lineari corrette da piccoli termini di tipo quadratico ($\alpha$-model) o cubico ($\beta$-model). Le equazioni del moto furono studiate numericamente ed i risultati furono analizzati in componenti di Fourier e poi rappresentati in funzione del tempo. Partendo da una configurazione iniziale in cui tutta l'energia era concentrata in un solo modo di oscillazione, ci si aspettava di osservare una graduale distribuzione dell'energia tra i diversi modi, con tendenza asintotica all'equipartizione. Risultò invece che solo i primi modi venivano coinvolti nella spartizione e che il sistema seguiva un andamento pseudo-ciclico, con il primo modo che periodicamente tornava ad un valore vicino entro l'1% al valore iniziale (si veda [1]). Tale comportamento suggerì per la prima volta che le teorie dell'epoca sull'universalità di mixing e termalizzazione potessero non essere interamente giustificate.

L'apparente paradosso portato alla luce da Fermi, Pasta, Ulam e Tsigou venne poi studiato con diverse tecniche ed è ora noto che il sistema tende effettivamente all'equipartizione dell'energia, anche se su scale temporali molto più ampie rispetto a quelle previste in origine. Tale problema, con le sue varianti, è comunque tuttora di grande interesse ed è indagato da una letteratura estremamente recente ed attuale. In questo elaborato si propone uno studio specifico di una catena di Fermi-Pasta-Ulam con estremi fissi e non linearità di grado tre nelle forze: per tale sistema si calcola la forma normale di Birkhoff-Gustavson, con l'obiettivo di capire gli eventuali meccanismi di risonanza che portano il sistema all'equilibrio.

# Capitolo 1

# Impostazione generale del problema

## 1.1 Descrizione del sistema

E' data una catena di $N+1$ particelle $j = 0 \dots N$, con estremi $j = 0$, $j = N$ fissati e nella quale ciascuna particella interagisce con le due adiacenti per mezzo di forze non lineari di grado tre. Detto $q_j$ lo spostamento della $j$-esima particella dal punto di equilibrio e $p_j$ il momento associato, si può esprimere la distanza tra ciascuna particella e la successiva come $r_j = q_{j+1} - q_j$. Il potenziale d'interazione dipende esclusivamente da tale distanza e può essere definito come $\Phi(r_j) = \frac{r_j^2}{2} + g\frac{r_j^4}{4}$. Si possono quindi scrivere l'Hamiltoniana associata al sistema e le equazioni del moto che lo descrivono:

$$H = \sum_{j=0}^{N-1} \left( \frac{p_j^2}{2} + \Phi(r_j) \right) \qquad \begin{cases} \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} = p_j \\ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} = \Phi'(q_{j+1} - q_j) - \Phi'(q_j - q_{j-1}) \end{cases}$$

mentre per gli estremi fissi valgono le condizioni $q_0 = q_N = 0$ e $p_0 = p_N = 0$. Conviene ora applicare un cambio di variabili, scrivendo le $q_j$, $p_j$ tramite sviluppo in serie di Fourier. Utilizzando la base $\phi_k(j) := \sqrt{\frac{2}{N}} \sin\!\left(\frac{\pi k j}{N}\right)$ si scrivono le vecchie coordinate come combinazioni lineari di vettori della base, con coefficienti $Q_k$, $P_k$. Essendo i vettori della base costanti, la dipendenza temporale delle $q_j$, $p_j$ è interamente contenuta nei coefficienti $Q_k$, $P_k$, che ora fungono da nuove coordinate:

$$\begin{cases} q_j = \sum_{k=1}^{N-1} Q_k \phi_k(j) \\ p_j = \sum_{k=1}^{N-1} P_k \phi_k(j) \end{cases} \qquad \begin{cases} Q_k = \sum_{j=1}^{N-1} q_j \phi_k(j) \\ P_k = \sum_{j=1}^{N-1} p_j \phi_k(j) \end{cases}$$

Tale trasformazione è canonica: $\{Q_k,\, P_{k'}\} = \delta_{k,\,k'}$. E' quindi sufficiente scrivere l'Hamiltoniana nelle nuove variabili, mentre le equazioni di Hamilton rimangono invariate: [1]

$$H = \underbrace{\sum_{k=1}^{N-1} \left[ \frac{P_k^2}{2} + \omega_k^2 \frac{Q_k^2}{2} \right]}_{H_2} + \underbrace{\frac{g}{8N} \sum_{k_1 \dots k_4 = 1}^{N-1} \Delta_4(k_1, \dots, k_4) \prod_{s=1}^{4} \omega_{k_s} Q_{k_s}}_{gH_4}$$

$$\begin{aligned} \text{con } \Delta_4 := {} & \delta_{k_1+k_2+k_3,k_4} + \delta_{k_1+k_2+k_4,k_3} + \delta_{k_1+k_3+k_4,k_2} + \delta_{k_2+k_3+k_4,k_1} + \\ & \delta_{k_1+k_2,k_3+k_4} + \delta_{k_1+k_3,k_2+k_4} + \delta_{k_1+k_4,k_2+k_3} + \\ & -\delta_{k_1+k_2+k_3,k_4+2N} - \delta_{k_1+k_2+k_4,k_3+2N} - \delta_{k_1+k_3+k_4,k_2+2N} - \delta_{k_2+k_3+k_4,k_1+2N} \\ & -\delta_{k_1+k_2+k_3+k_4,2N} \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\text{e con } \omega_{k_s} = 2 \sin\left( \frac{\pi k_s}{2N} \right) \tag{1.2}$$

[1] con abuso di notazione, qui e in seguito, si utilizza lo stesso simbolo per l'Hamiltoniana prima e dopo il cambio di variabili

Si noti che il selettore $\Delta_4(k_1, \dots, k_4)$ è completamente simmetrico rispetto allo scambio di indici $k_1, \dots, k_4$.

E' utile applicare infine un'ulteriore trasformazione per descrivere il problema in variabili di Birkhoff:

$$z_k := \frac{\omega_k Q_k + iP_k}{\sqrt{2\omega_k}} \qquad Q_k = \frac{z_k + z_k^*}{\sqrt{2\omega_k}}$$
$$z_k* := \frac{\omega_k Q_k - iP_k}{\sqrt{2\omega_k}} \qquad P_k = -i\sqrt{\frac{\omega_k}{2}}(z_k - z_k^*)$$

che porta all'Hamiltoniana:

$$H = \underbrace{\sum_{k=1}^{N-1} \omega_k |z_k|^2}_{H_2} + \underbrace{\frac{g}{32N} \sum_{k_1 \dots k_4 = 1}^{N-1} \Delta_4(k_1, \dots, k_4) \prod_{s=1}^{4} \sqrt{\omega_{k_s}}(z_{k_s} + z_{k_s}^*)}_{gH_4} \tag{1.3}$$

In questo caso la trasformazione non è canonica: $\{z_k,\, z_{k'}^*\} = -i\delta_{k,\,k'}$, per cui conviene riscrivere le equazioni del moto:

$$\dot{z_k} = -i\frac{\partial H}{\partial z_k^*} \qquad \dot{z_k^*} = i\frac{\partial H}{\partial z_k}$$

Sulla base di questi presupposti si può dunque costruire la forma normale al secondo ordine di Birkhoff-Gustavson, scopo di questo elaborato. Prima di procedere, si propongono delle osservazioni su ciò che ci si aspetta di trovare e sulle possibili implicazioni di tale studio.

## 1.2 Obiettivi e congetture

Si può notare innanzitutto come, considerando solo la parte lineare del problema (ovvero il termine quadratico del potenziale), l'Hamiltoniana risulti essere la somma delle energie $E_k = \frac{P_k^2}{2} + \omega_k^2 \frac{Q_k^2}{2}$ di ciascun modo $k$-esimo: $H_2 = \sum_{k=1}^{N-1} E_k$. Ne consegue che, per Hamiltoniana pari ad $H_2$, le energie dei modi sono costanti del moto: $\dot{E}_k = \{E_k,\, H_2\} = \{E_k,\, H_2(E_k)\} = 0$. Se quindi si costruisce la configurazione iniziale del sistema eccitando solo alcuni dei modi, con il passare del tempo solo tali modi rimarranno eccitati, ciascuno con la propria energia, senza che ci sia alcuna ripartizione.
Se invece si considera anche la parte non lineare del problema (in questo caso $H = H_2 + gH_4$) ci si aspetta che le energie dei modi normali cessino di essere costanti del moto: $\dot{E}_k = \{E_k,\, H_2 + gH_4\} = \{E_k,\, H_2(E_k)\} + \{E_k,\, gH_4\} = \{E_k,\, gH_4\} \neq 0$, cosicché nel corso del tempo l'energia, inizialmente concentrata in alcuni modi, verrà ripartita tra tutti i modi di oscillazione. In particolare si può prendere in esame la media al tempo corrente dell'energia del modo $k$-esimo, definita come: $\bar{E}_k(t) = \frac{1}{t}\int_0^t E_k(r)\, dr$. Assumendo valida l'ipotesi ergodica, ci si aspetta che tali medie tendano con il passare del tempo all'equipartizione. Tale previsione sembra confermata da simulazioni numeriche che, come già accennato, risolvono l'apparente paradosso trovato da Fermi tramite l'osservazione su scale temporali molto più ampie di quelle iniziali.

Uno degli obiettivi dell'elaborato è quindi indagare la dipendenza dell'Hamiltoniana dalle energie dei modi e verificare a quale ordine queste energie cominciano effettivamente a manifestare la loro tendenza all'equipartizione, allontanandosi significativamente dal comportamento quasi-periodico caratteristico degli ordini più bassi. Per uno studio delle energie conviene, dopo aver trovato la forma normale, ricorrere alle variabili azione-angolo. In queste variabili, il sistema all'ordine zero presenta un'Hamiltoniana dipendente dalle sole azioni: $H_2 = \sum_{k=1}^{N-1} \omega_k I_k$ con equazioni del moto banali: $\dot{\Phi}_k = \frac{\partial H_2}{\partial I_k} = \omega_k$ e $\dot{I}_k = -\frac{\partial H_2}{\partial \Phi_k} = 0$, per cui gli angoli ruotano a velocità costante (moto periodico) e le azioni sono costanti del moto. E' noto inoltre che, nel caso in esame, anche il primo ordine della forma normale dipende dalle sole azioni: queste rimangono dunque conservate, mentre gli angoli variano con una velocità $\omega$ alla quale si aggiunge una correzione lineare in $I$, di ordine $\mathcal{O}(g)$ (con $g$ parametro perturbativo). Tale risultato sarà verificato nel Capitolo 2 di questo elaborato.

Non è invece noto se al secondo ordine della forma normale compaiano o meno dipendenze dagli angoli. Se comparissero, questo comporterebbe una variazione delle azioni all'ordine $\mathcal{O}(g^2)$, mentre se non comparissero, tale variazione avverrebbe ad ordini $\mathcal{O}(g^3)$ o superiori. L'ordine al quale le azioni smettono di essere costanti si riflette sulla scala temporale alla quale si deve lavorare per osservare l'equipartizione: da $\frac{dI_k}{dt} = \mathcal{O}(g^m)$ si può riscalare il tempo $\frac{dI_k}{dT} := \frac{dI_k}{d(g^m t)} = \mathcal{O}(1)$ e si trova che l'azione $I_k$ è costante entro scale temporali $T = g^m t$, ovvero il tempo di raggiungimento dell'equilibrio aumenta di un fattore $\frac{1}{g^m}$.

Infine, quando anche l'Hamiltoniana al secondo ordine risultasse dipendere da angoli, sarebbe interessante capire quanti ne compaiono e in che relazione. Secondo una congettura avanzata da M. Onorato in [3], basata su simulazioni numeriche, gli angoli dovrebbero comparire in sestetti, e per giustificare l'approccio all'equilibrio di un sistema di $N$ particelle (ove $N$ può essere dell'ordine di $\sim 10^{18\div 20}$) tali sestetti dovrebbero essere in numero consistente ed essere organizzati in una rete completamente connessa, in modo tale da influenzarsi e non rimanere isolati. Il Capitolo 4 di questo elaborato indaga quindi il termine al secondo ordine dell'Hamiltoniana in forma normale con l'obiettivo di osservare, nel caso specifico in esame, l'eventuale comparsa di variabili di tipo angolo e la loro struttura.

## 1.3 Cenni di teoria perturbativa

Il problema in esame può essere trattato utilizzando la teoria perturbativa, che fornisce strumenti appositi per lo studio di sistemi quasi integrabili. Tali sistemi possono essere descritti tramite un'Hamiltoniana del tipo:

$$H = h + \sum_m \lambda^m P_m \tag{1.4}$$

dove $h$ è l'Hamiltoniana di un sistema integrabile, per la quale è quindi noto il flusso $\phi_h^r$; i termini in sommatoria fungono da correzioni al sistema imperturbato, ordinate gerarchicamente; e $\lambda$ è un parametro piccolo, definito formalmente per aiutare a gestire la gerarchia degli ordini durante lo studio.

Data un'Hamiltoniana di questo genere, la si vuole ricondurre alla cosiddetta forma normale all'ordine $n$ rispetto ad $h$, definita come:

$$K = h + \sum_{j=1}^{n} \lambda^j S_j + R_{n+1} \tag{1.5}$$

ove le $S_j$ sono integrali primi per l'Hamiltoniana imperturbata: $\{S_j, h\} = 0 \; \forall j = 1 \dots n$ mentre $R_{n+1}$ indica un resto di ordine superiore: $R_{n+1} = \mathcal{O}(\lambda^{n+1})$. Per ricondurre la $H$ iniziale alla forma normale $K$ conviene utilizzare trasformazioni canoniche, in modo tale che ad ogni trasformazione debba essere ricalcolata solo l'Hamiltoniana, mentre le equazioni di Hamilton associate rimangono invariate. Si cerca quindi una trasformazione nella forma:

$$\mathcal{C}_\lambda^{-1} := \phi_{G_1}^{\lambda} \circ \phi_{G_2}^{\lambda^2} \circ \dots \circ \phi_{G_n}^{\lambda^n} \tag{1.6}$$

ove le $\phi_{G_i}^{\lambda^i}$ sono flussi di hamiltoniane incognite $G_i$, che andranno scelte in modo tale da ricondursi effettivamente alla forma normale voluta. La composizione di flussi hamiltoniani garantisce che la trasformazione sia canonica, come desiderato. Si noti inoltre che i flussi nella definizione di $\mathcal{C}_\lambda^{-1}$ sono calcolati al tempo $\lambda^i$: questo garantisce che ciascun flusso vada a modificare l'Hamiltoniana solo a partire dall'$i$-esimo ordine, lasciando invariati i precedenti già ricondotti alla forma normale. In particolare, ponendo $\lambda = 0$ (approssimazione all'ordine zero) la trasformazione diventerebbe un'identità e l'Hamiltoniana $H$ - che al'ordine zero è pari ad $h$ - rimarrebbe effettivamente pari ad $h$, già integrabile e nota.

Conviene inoltre definire le seguenti grandezze, alle quali si farà riferimento nel seguito.
**Definizione** (Media)**.** La media di F sul flusso imperturbato di Hamiltoniana $h$ è definita come: $\langle F \rangle_h := \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t F \circ \phi_h^r \, dr$

**Definizione** (Fluttuazione)**.** La fluttuazione di F è definita come la sua deviazione dalla media, ovvero: $\delta_h F := F - \langle F \rangle_h$
**Definizione.** Si definiscono inoltre i seguenti operatori, per una generica Hamiltoniana $h$ e fluttuazione $\delta_h F$:

$$L_h := \{\cdot\,, h\}$$
$$L_h^{-1} F := \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t (r-t)\delta_h F \circ \phi_h^r \, dr$$

Sulla base di queste premesse si può dimostrare (si veda [5, p.46 ]) il seguente:
**Teorema** (Principio della media)**.** *Sia $H_\lambda(x) = h(x) + \sum_m \lambda^m P_m$, $\forall x \in D \subseteq \Gamma$, con $\Gamma$ spazio delle fasi,*[2] *con $H_0(x) = h(x)$ integrabile in $D$ e con flusso $\phi_h^t(\xi)$ noto $\forall \xi \in D$ e limitato. Allora:*

1. *per ogni scelta delle generatrici $G_1, \dots, G_n$ che definiscono la trasformazione canonica $\mathcal{C}_\lambda^{-1} := \phi_{G_1}^{\lambda} \circ \phi_{G_2}^{\lambda^2} \circ \dots \circ \phi_{G_n}^{\lambda^n}$ si ha:*

$$K_\lambda := H_\lambda \circ \mathcal{C}_\lambda^{-1} = h + \sum_{j=1}^{n} \lambda^j \mathcal{P}_j + \mathcal{R}_{n+1}$$
$$\text{con } \mathcal{P}_j = -L_h G_j + P_j + F_j(h,\, P_1 \dots,\, P_{j-1},\, G_1, \dots,\, G_{j-1})$$
$$\text{per } j = 1, \dots, n \quad \text{con } F_1 = 0$$
$$\text{con } \mathcal{R}_{n+1} = \sum_{j \geq n+1} \lambda^j [P_j + F_j(h,\, P_1, \dots,\, P_{j-1},\, G_1, \dots,\, G_N)]$$

2. *nella forma normale, la perturbazione di ordine $j$ è data da:*

$$\mathcal{P}_j = S_j := \langle P_j + F_j \rangle_h \quad \text{con } j = 1, \dots, n$$

3. *le generatrici che portano alla forma normale sono date da*

$$G_j = \mathcal{G}_j + L_h^{-1} \delta_h (P_j + F_j) \quad \text{con } j = 1, \dots, n \quad \text{e con } \mathcal{G}_j \in \ker(L_h) \text{ arbitrario}$$

Sulla base di questo teorema si può ricavare l'espressione specifica per la forma normale al secondo ordine dell'Hamiltoniana $H_\lambda$. Ponendo $\mathcal{G}_1 = 0$ si ha:

$$K_\lambda = h + \lambda \langle P_1 \rangle_h + \lambda^2 \left( \langle P_2 \rangle_h + \frac{1}{2} \langle \{\delta_h P_1, \delta_h G_1\} \rangle_h \right) + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

Si può quindi applicare la teoria perturbativa al problema in esame in questo elaborato, come segue:

$$H_g = \underbrace{\sum_{k=1}^{N-1} \omega_k |z_k|^2}_{h=:H_2} + \underbrace{\frac{g}{32N} \sum_{k_1,\dots,k_4=1}^{N-1} \Delta_4(k_1, \dots, k_4) \prod_{s=1}^{4} \sqrt{\omega_s}(z_{k_s} + z_{k_s}^*)}_{gP_1=:H_4}$$
$$K_g = \underbrace{H_2}_{\text{ordine zero}} + \underbrace{\langle H_4 \rangle}_{\text{primo ordine}} + \underbrace{\frac{1}{2} \langle \{H_4 - \langle H_4 \rangle, G_1\} \rangle}_{\text{secondo ordine}}$$
$$G_1 = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t (r-t)(H_4 - \langle H_4 \rangle) \circ \phi_{H_2}^r \, dr \qquad \text{con } \phi_{H_2}^r(z_k, z_k^*) = (z_k e^{-i\omega_k r}, z_k^* e^{i\omega_k r})$$

Qui e in seguito, in assenza di ulteriori specificazioni, le medie si intendono calcolate sul flusso di $H_2$. L'obiettivo principale dell'elaborato è dunque ricavare primo e secondo ordine della forma normale e la generatrice $G_1$ che permette di ottenere tale forma.

[2] ovvero l'ordinamento perturbativo è locale

# Capitolo 2

# Primo ordine

## 2.1 Descrizione del termine al primo ordine

Come prima cosa si calcola il termine al primo ordine della forma normale, che - in base a quanto detto in precedenza - è definito da:

$$\langle H_4 \rangle = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t H_4 \circ \phi^r_{H_2} \, dr \qquad \text{con } \phi^r_{H_2} = (z_k e^{-i\omega_k r}, z^*_k e^{i\omega_k r})$$

$$\text{e con } H_4 = \frac{g}{32N} \sum_{k_1 \dots k_4 = 1}^{N-1} \Delta_4 \prod_{s=1}^{4} \sqrt{\omega_{k_s}} (z_{k_s} + z^*_{k_s})$$

$$\langle H_4 \rangle = \frac{g}{32N} \sum_{k_1 \dots k_4 = 1}^{N-1} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \underbrace{\Delta_4 \prod_{s=1}^{4} (z_{k_s} e^{-i\omega_{k_s} r} + z^*_{k_s} e^{i\omega_{k_s} r})}_{A} \, dr \left( \prod_{s=1}^{4} \sqrt{\omega_s} \right) \tag{2.1}$$

ove $\Delta_4$ è il selettore già descritto in (1.1).

L'integrando $A$ in (2.1) può essere sviluppato come segue:

$$\begin{aligned} A = &\Delta_4 \left[ z_{k_1} z_{k_2} z_{k_3} z_{k_4} e^{i(-\omega_{k_1} - \omega_{k_2} - \omega_{k_3} - \omega_{k_4})r} + 4 z^*_{k_1} z_{k_2} z_{k_3} z_{k_4} e^{i(\omega_{k_1} - \omega_{k_2} - \omega_{k_3} - \omega_{k_4})r} \right. \\ &+ 6 z^*_{k_1} z^*_{k_2} z_{k_3} z_{k_4} e^{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3} - \omega_{k_4})r} + 4 z^*_{k_1} z^*_{k_2} z^*_{k_3} z_{k_4} e^{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} + \omega_{k_3} - \omega_{k_4})r} \\ &\left. + z^*_{k_1} z^*_{k_2} z^*_{k_3} z^*_{k_4} e^{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} + \omega_{k_3} + \omega_{k_4})r} \right] \end{aligned} \tag{2.2}$$

Esso è dunque composto da termini formati da: quattro variabili $z_{k_s}$ o $z^*_{k_s}$, una delta di Kronecker che proviene dal selettore e funge da vincolo sugli indici $k_s$ ed un esponenziale $e^{i\lambda r}$, ove $\lambda$ è una combinazione lineare delle $\omega_{k_s}$ con coefficienti $\pm 1$. Per linearità si può mediare ciascuno di questi termini separatamente e, notando che l'unica dipendenza dalla variabile di integrazione r è nell'esponenziale, si possono raccogliere gli altri fattori, riconducendosi a medie del tipo $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t e^{i\lambda r} \, dr$. La media di ciascun termine dà quindi un contributo non nullo solo se $\lambda = 0$:

$$\begin{aligned} \lambda \neq 0 \qquad &\Rightarrow \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t e^{i\lambda r} \, dr = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \left[ \frac{e^{i\lambda r}}{i\lambda} \right]_0^t = 0 \\ \lambda = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t e^{i\lambda r} \, dr = 1 \end{aligned}$$

Il punto fondamentale nel calcolo di $\langle H_4 \rangle$ è quindi capire in quali termini si può verificare la condizione $\lambda = 0$, ricordando che in ciascun termine gli indici $k_1$, $k_2$, $k_3$, $k_4$ presenti in $\lambda$ sono vincolati da una delta di Kronecker.
Per portare avanti questo studio osserviamo che in ciascun termine dello sviluppo (2.2) l'equazione

$\lambda = 0$ associata può essere ricondotta ad una delle tre forme seguenti, a seconda della combinazione di $z_{k_s}$ e $z^*_{k_s}$ presente nel termine:

$$-\omega_{k_1} - \omega_{k_2} - \omega_{k_3} - \omega_{k_4} = 0 \qquad \text{per termini del tipo} \quad z_{k_1}z_{k_2}z_{k_3}z_{k_4} \quad \text{e} \quad z^*_{k_1}z^*_{k_2}z^*_{k_3}z^*_{k_4} \tag{2.3}$$
$$\omega_{k_1} - \omega_{k_2} - \omega_{k_3} - \omega_{k_4} = 0 \qquad \text{per termini del tipo} \quad z^*_{k_1}z_{k_2}z_{k_3}z_{k_4} \quad \text{e} \quad z_{k_1}z^*_{k_2}z^*_{k_3}z^*_{k_4} \tag{2.4}$$
$$\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3} - \omega_{k_4} = 0 \qquad \text{per termini del tipo} \quad z^*_{k_1}z^*_{k_2}z_{k_3}z_{k_4} \tag{2.5}$$

E' quindi sufficiente studiare queste tre equazioni. Ciascuna andrà analizzata in presenza di ogni termine del selettore $\Delta_4$, in base al quale uno degli indici $k_s$ potrà essere scritto in funzione degli altri tre. Per alcune delle delta di Kronecker presenti nel selettore l'equazione ammetterà soluzioni, per altre invece l'equazione non sarà mai verificata.

## 2.2 Prima equazione

Lo studio della prima equazione (2.3) è banale: le $\omega_{k_s}$ sono sempre positive per ogni valore di $k_s$, dunque l'equazione non è mai verificata. I termini del tipo $z_{k_1}z_{k_2}z_{k_3}z_{k_4}$ e $z^*_{k_1}z^*_{k_2}z^*_{k_3}z^*_{k_4}$ danno un contributo nullo alla media $\langle H_4 \rangle$.

## 2.3 Seconda equazione

Si passa alla seconda equazione (2.4). Ricordando che questa andrà studiata in presenza di ciascun termine del selettore $\Delta_4$, si adotta la seguente procedura: in base al vincolo dato dalla delta di Kronecker si scrive uno degli indici $k_s$ in funzione degli altri tre e si sostituisce nell'equazione, ottenendone una nuova, dipendente da soli tre indici. Si trova che alcune delle delta conducono alla stessa equazione finale: questo è dovuto alla simmetria dell'equazione di partenza rispetto allo scambio di indici $k_2$, $k_3$, $k_4$ e alla struttura sinusoidare delle $\omega_s$, che permette di sfruttare le seguenti relazioni:

$$\omega_{2N-\alpha} = 2\sin\left(\pi - \frac{\pi\alpha}{2N}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2N}\right) = \omega_\alpha \tag{2.6a}$$
$$\omega_{\alpha\pm 2N} = 2\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2N} \pm \pi\right) = 2\sin\left(-\frac{\pi\alpha}{2N}\right) = \omega_{-\alpha} \tag{2.6b}$$

valide per ogni $\alpha$ combinazione lineare delle $k_s$.
In questo modo si ottengono quattro sole equazioni, nella forma: $\omega_{k_1(k_2,k_2,k_3)} - \omega_{k_2} - \omega_{k_3} - \omega_{k_4} = 0$ come riportato in tabella 2.1. Ciascuna equazione viene studiata sfruttando il procedimento descritto da Bob Rink in [2, p.34]: si scrive ciascuna $\omega_{k_s}$ come: $\omega_{k_s} = 2\sin(\frac{\pi k_s}{2N}) = \frac{1}{i}\left[e^{i\frac{\pi k_s}{2N}} - e^{-i\frac{\pi k_s}{2N}}\right]$ e definendo tre nuove variabili $x := e^{i\frac{\pi k_2}{2N}}$, $y := e^{i\frac{\pi k_3}{2N}}$, $z := e^{i\frac{\pi k_4}{2N}}$ ci si riconduce ad un'equazione algebrica nella forma: $\mathcal{F}(x, y, z) - (x - \frac{1}{x}) - (y - \frac{1}{y}) - (z - \frac{1}{z}) = 0$ ove $\mathcal{F}(x, y, z)$ assume un valore diverso per ciascuna equazione, come riportato in tabella 2.1. Si nota che in tali equazioni ognuna delle variabili $x$, $y$, $z$ compare con grado massimo pari a 1 sia a numeratore che a denominatore, dunque le equazioni sono quadratiche in ciascuna delle variabili. Questa è una caratteristica generale, dovuta all'andamento sinusoidale delle $\omega_{k_s}$ e alla linearità delle relazioni tra le $k_s$ imposte dal selettore. Tale caratteristica si presenta anche in situazioni analoghe ad ordini superiori (si veda più avanti, Capitolo 4).
Ottenute le soluzioni delle quattro equazioni, si verifica la loro accettabilità, ricordando che gli indici $k_s$ sono naturali compresi tra 1 ed $N-1$. Quando il responso non è immediato, si può sfruttare il fatto che le variabili $x$, $y$ sono nella generica forma $x = e^{i\phi}$, $y = e^{i\theta}$: si è applicato tale cambio di variabili alle soluzioni $z = z(x, y)$ e, ricordando che anche $z$ ha una forma analoga, si è imposto $|z(\phi,\, \theta)| = 1$. In tutti i casi quest'ultima equazione è risultata priva di soluzioni accettabili, garantendo la non accettabilità della soluzione in $z$.
Si riporta nella tabella 2.1 il resoconto dello studio esposto in questa Sezione, in base al quale risulta che l'equazione (2.4), combinata con i vincoli imposti dal selettore, non ammette mai soluzione. Ne consegue che i termini del tipo $z^*_{k_1}z_{k_2}z_{k_3}z_{k_4}$ e $z_{k_1}z^*_{k_2}z^*_{k_3}z^*_{k_4}$ non contribuiscono alla media $\langle H_4 \rangle$.

Tabella 2.1: Studio del'equazione (2.4): $\omega_{k_1} - \omega_{k_2} - \omega_{k_3} - \omega_{k_4} = 0$. Si riportano le delta di Kronecker che conducono alla stessa equazione a tre indici, i termini $\omega_{k_1(k_2,\,k_2,\,k_3)}$ e i termini $\mathcal{F}(x,\,y,\,z)$ associati alle equazioni e le soluzioni accettabili.

| delta | $\omega_{k_1(k_2,\,k_2,\,k_3)}$ | $\mathcal{F}(x,\,y,\,z)$ | soluzioni accettabili |
|---|---|---|---|
| $\delta_{k_2+k_3+k_4,\,k_1}$, $\delta_{k_1+k_2+k_3+k_4,\,2N}$ | $\omega_{k_4+k_3+k_2}$ | $\left(xyz - \frac{1}{xyz}\right)$ | / |
| $\delta_{k_1+k_2,\,k_3+k_4}$, $\delta_{k_1+k_3,\,k_2+k_4}$, $\delta_{k_1+k_4,\,k_2+k_3}$ | $\omega_{k_4+k_3-k_2}$ | $\left(\frac{z}{xy} - \frac{xy}{z}\right)$ | / |
| $\delta_{k_1+k_2+k_3,\,k_4}$, $\delta_{k_1+k_2+k_4,\,k_3}$, $\delta_{k_1+k_3+k_4,\,k_2}$ $\delta_{k_1+k_2+k_3,\,k_4+2N}$, $\delta_{k_1+k_2+k_4,\,k_3+2N}$, $\delta_{k_1+k_3+k_4,\,k_2+2N}$ | $\omega_{k_4-k_3-k_2}$ | $\left(\frac{z}{xy} - \frac{xy}{z}\right)$ | / |
| $\delta_{k_2+k_3+k_4,\,k_1+2N}$ | $\omega_{-k_4-k_3-k_2}$ | $\left(\frac{1}{xyz} - xyz\right)$ | / |

## 2.4 Terza equazione

Rimane da studiare l'equazione (2.5), associata ai termini $z^*_{k_1} z^*_{k_2} z_{k_3} z_{k_4}$. La procedura è analoga a quella esposta nella Sezione precedente: si sfruttano le simmetrie dell'equazione di partenza (in questo caso rispetto agli scambi di $k_1$ con $k_2$, di $k_3$ con $k_4$ e di $(k_1,\,k_2)$ con $(k_3,\,k_4)$) per raggruppare i termini del selettore che conducono alla stessa equazione a tre indici, in questo caso nella forma $\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3} - \omega_{k_4(k_1,\,k_2,\,k_3)} = 0$; si definisce un cambio di variabili $x := e^{i\frac{\pi k_1}{2N}}$, $y := e^{i\frac{\pi k_2}{2N}}$, $z := e^{i\frac{\pi k_3}{2N}}$ che conduce a equazioni algebriche del tipo $(x - \frac{1}{x}) + (y - \frac{1}{y}) - (z - \frac{1}{z}) - \mathcal{F}(x,\,y,\,z) = 0$; le si risolve, studiandone l'accettabilità. Si riportano i risultati del procedimento nella tabella 2.2.

Tabella 2.2: Studio del'equazione (2.5): $\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3} - \omega_{k_4} = 0$. Si riportano le delta di Kronecker che conducono alla stessa equazione a tre indici, i termini $\omega_{k_4(k_1,\,k_2,\,k_3)}$ e i termini $\mathcal{F}(x,\,y,\,z)$ associati alle equazioni e le soluzioni accettabili.

| delta | $\omega_{k_4(k_1,\,k_2,\,k_3)}$ | $\mathcal{F}(x,\,y,\,z)$ | soluzioni accettabili |
|---|---|---|---|
| $\delta_{k_1+k_2+k_3,\,k_4}$, $\delta_{k_1+k_2+k_4,\,k_3}$, $\delta_{k_1+k_3+k_4,\,k_2}$ $\delta_{k_2+k_3+k_4,\,k_1}$, $\delta_{k_1+k_2+k_3+k_4,\,2N}$ | $\omega_{k_1+k_2+k_3}$ | $\left(xyz - \frac{1}{xyz}\right)$ | / |
| $\delta_{k_1+k_2,\,k_3+k_4}$, $\delta_{k_1+k_2+k_4,\,k_3+2N}$, $\delta_{k_1+k_2+k_3,\,k_4+2N}$ | $\omega_{k_1+k_2-k_3}$ | $\left(\frac{xy}{z} - \frac{z}{xy}\right)$ | $z = y \lor z = x$ |
| $\delta_{k_1+k_4,\,k_2+k_3}$, $\delta_{k_1+k_3,\,k_2+k_4}$, $\delta_{k_2+k_3+k_4,\,k_1+2N}$ $\delta_{k_1+k_3+k_4,\,k_2+2N}$ | $\omega_{k_1-k_2+k_3}$ | $\left(\frac{xz}{y} - \frac{y}{xz}\right)$ | $z = y$ |

In tabella sono state segnalate come accettabili quelle soluzioni in $x$, $y$, $z$ che, una volta ricondotte alle $k_1$, $k_2$, $k_3$ originali, risultano compatibili con il dominio delle $k_s = 1, \ldots, N-1$. Le soluzioni vanno poi imposte nell'espressione per l'ultimo indice $k_4(k_1,\,k_2,\,k_3)$, specifica per ogni termine del selettore. Anche in questo caso il risultato deve rientrare nel range $1, \ldots, N-1$, condizione che si verifica solo in corrispondenza delle seguenti delta di Kronecker: $\delta_{k_1+k_2,k_3+k_4}$, $\delta_{k_1+k_4,k_2+k_3}$ e $\delta_{k_1+k_3,k_2+k_4}$. Questi sono dunque tutti e soli i termini del selettore in corrispondenza dei quali il termine iniziale $6z^*_{k_1} z^*_{k_2} z_{k_3} z_{k_4} e^{i(\omega_{k_1}+\omega_{k_2}-\omega_{k_3}-\omega_{k_4})r}$, associato all'equazione (2.5) in studio in questa Sezione, dà contributo non nullo alla media.

## 2.5 Risultato del conto

Avendo studiato tutti i termini dell'integrando (2.2) ed avendo trovato quali di questi danno contributo non nullo alla media, è ora possibile calcolare, a partire dalla (2.1), il risultato finale di $\langle H_4 \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle H_4 \rangle &= \frac{g}{32N} \sum_{k_1 \ldots k_4 = 1}^{N-1} \sqrt{\omega_{k_1} \ldots \omega_{k_4}} \left[ 6 |z_{k_1}|^2 |z_{k_2}|^2 \delta_{k_1,\, k_3} \delta_{k_2,\, k_4} + 18 |z_{k_1}|^2 |z_{k_2}|^2 \delta_{k_1,\, k_4} \delta_{k_2,\, k_3} \right] \\ &= \frac{3g}{4N} \sum_{k_1,\, k_2 = 1}^{N-1} \omega_{k_1} \omega_{k_2} |z_{k_1}|^2 |z_{k_2}|^2 = \frac{3g}{4N} (H_2)^2 \end{aligned} \tag{2.7}$$

ove si è usato il fatto che gli indici $k_s$, essendo sommati sullo stesso range, sono ora interscambiabili.

Si è quindi calcolato il termine al primo ordine della forma normale, che presenta la struttura prevista: le uniche dipendenze da $z_k$, $z_k^*$ sono del tipo $|z_k|^2$, ovvero - in termini di variabili azione-angolo - il termine $\langle H_4 \rangle$ dipende solo dalle azioni. Questo, come anticipato nella sezione 1.2, comporta che le azioni siano costanti del moto almeno fino all'ordine $\mathcal{O}(g)$, e che si debba arrivare almeno all'ordine $\mathcal{O}(g^2)$ per osservare una tendenza all'equipartizione.

# Capitolo 3

# Generatrice

Si procede ora con il calcolo della generatrice $G_1$ che, come riportato nella sezione 1.3 a pag. 3, è un'Hamiltoniana il cui flusso permette di definire la precisa trasformazione canonica che conduce alla forma normale al primo ordine. Tale generatrice è definita come:

$$
\begin{aligned}
G_1 =& \mathcal{G}_1 + L_{H_2}^{-1}\delta_{H_2}(P_1) \\
=& \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t (r-t)[H_4 - \langle H_4\rangle]\circ \phi_{H_2}^r \, dr \\
=& \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t (r-t)[H_4 \circ \phi_{H_2}^r - \langle H_4\rangle] \, dr \\
=& \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t (r-t)\Bigg[\underbrace{H_4 \circ \phi_{H_2}^r}_{I_1} - \underbrace{\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t H_4\circ\phi_{H_2}^{r'}\, dr'}_{I_2}\Bigg] \, dr
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Si nota che sia in $I_1$ che in $I_2$ compare l'espressione $H_4 \circ \phi_{H_2}^r$ che può essere sviluppata come:

$$
H_4 \circ \phi_{H_2}^r = \frac{g}{32N} \sum_{k_1 \dots k_4 = 1}^{N-1} \left(\prod_{s=1}^4 \sqrt{\omega_s}\right) \Delta_4 \prod_{s=1}^4 (z_{k_s} e^{-i\omega_{k_s} r} + z_{k_s}^* e^{i\omega_{k_s} r})
$$

ove l'espressione $\Delta_4 \prod_{s=1}^4 (z_{k_s} e^{-i\omega_{k_s} r} + z_{k_s}^* e^{i\omega_{k_s} r})$ può essere a sua volta esplicitata come in (2.2).
Si è già osservato come in $I_2$ contrubiscano solo i termini che, nello sviluppo (2.2), presentano esponenziale con $\lambda = 0$. Conviene allora studiare anche $I_1$ separando i termini in cui $\lambda = 0$ dai termini in cui $\lambda \neq 0$. In questo modo nei primi l'esponenziale è banale, $e^{i\lambda r} = e^{i\,0} = 1$ ed essi si semplificano esattamente con $I_2$. I secondi costituiscono quindi l'unico contributo effettivo alla generatrice. Nel loro caso si può poi osservare come la variabile di integrazione $r$ compaia solo ad esponente: $e^{i\lambda r}$, ove ora $\lambda \neq 0$. Per linearità si può quindi ricondursi al calcolo di medie del tipo:

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t (r-t) e^{i\lambda r}\, dr &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\left(\left[(r-t)\frac{e^{i\lambda r}}{i\lambda}\right]_{r=0}^{r=t} - \int_0^t \frac{e^{i\lambda r}}{i\lambda}\, dr\right) \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\left(\frac{t}{i\lambda} - \frac{e^{i\lambda t}-1}{(i\lambda)^2}\right) = \frac{1}{i\lambda}
\end{aligned}
$$

Ne risulta una generatrice nella forma:

$$\begin{aligned}
G_1 =& \frac{g}{32N} \sum_{k_1 \dots k_4 = 1}^{N-1} \left( \prod_{s=1}^{4} \sqrt{\omega_{k_s}} \right) \Delta_4 \\
& \left[ \frac{z_{k_1} z_{k_2} z_{k_3} z_{k_4}}{-i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} + \omega_{k_3} + \omega_{k_4})} + 4 \frac{z^*_{k_1} z_{k_2} z_{k_3} z_{k_4}}{-i(-\omega_{k_1} + \omega_{k_2} + \omega_{k_3} + \omega_{k_4})} + \right. \\
& \left. + 4 \frac{z^*_{k_1} z^*_{k_2} z^*_{k_3} z_{k_4}}{-i(-\omega_{k_1} - \omega_{k_2} - \omega_{k_3} + \omega_{k_4})} + \frac{z^*_{k_1} z^*_{k_2} z^*_{k_3} z^*_{k_4}}{-i(-\omega_{k_1} - \omega_{k_2} - \omega_{k_3} - \omega_{k_4})} \right] + \\
+& \frac{g}{32N} \sum_{k_1 \dots k_4 = 1}^{N-1} \left( \prod_{s=1}^{4} \sqrt{\omega_{k_s}} \right) 6 \frac{z^*_{k_1} z^*_{k_2} z_{k_3} z_{k_4}}{-i(-\omega_{k_1} - \omega_{k_2} + \omega_{k_3} + \omega_{k_4})} \\
& \left[ \Delta_4 - \delta_{k_1+k_2,\, k_3+k_4} \delta_{k_1,\, k_3} - \delta_{k_1+k_2,\, k_3+k_4} \delta_{k_2,\, k_3} - \delta_{k_1+k_3,\, k_2+k_4} \delta_{k_2,\, k_3} - \delta_{k_1+k_4,\, k_2+k_3} \delta_{k_1,\, k_3} \right]
\end{aligned} \tag{3.2}$$

ove si sono sottratti tutti e soli i termini che verificavano la condizione $\lambda = 0$.

# Capitolo 4

# Secondo ordine

## 4.1 Descrizione del termine al secondo ordine

Si prosegue ora con il calcolo del secondo ordine della forma normale:

$$\frac{1}{2}\left\langle\{H_4 - \langle H_4\rangle\,,\,G_1\}\right\rangle = \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \{H_4 - \langle H_4\rangle\,,\,G_1\}\circ\phi^r_{H_2}\,dr \tag{4.1}$$

Le espressioni per $H_4 - \langle H_4\rangle$ e $G_1$ sono note:

$$H_4 - \langle H_4\rangle = \frac{g}{32N}\sum_{k_1\ldots k_4=1}^{N-1}\left(\prod_{s=1}^{4}\sqrt{\omega_{k_s}}\right)\Delta_4\,E \quad + \frac{g}{32N}\sum_{k_1\ldots k_4=1}^{N-1}\left(\prod_{s=1}^{4}\sqrt{\omega_{k_s}}\right)6 z^*_{k_1}z^*_{k_2}z_{k_3}z_{k_4}\Delta'_4 \tag{4.2}$$

$$G_1 = \frac{g}{32N}\sum_{j_1\ldots j_4=1}^{N-1}\left(\prod_{s=1}^{4}\sqrt{\omega_{j_s}}\right)\Delta_4\,F \quad + \frac{g}{32N}\sum_{j_1\ldots j_4=1}^{N-1}\left(\prod_{s=1}^{4}\sqrt{\omega_{j_s}}\right)6\frac{z^*_{j_1}z^*_{j_2}z_{j_3}z_{j_4}}{-i(-\omega_{j_1}-\omega_{j_2}+\omega_{j_3}+\omega_{j_4})}\Delta'_4 \tag{4.3}$$

ove per comodità si sono definiti:

$$\begin{aligned}
E :=& z_{k_1}z_{k_2}z_{k_3}z_{k_4} + 4z^*_{k_1}z_{k_2}z_{k_3}z_{k_4} + 4z^*_{k_1}z^*_{k_2}z^*_{k_3}z_{k_4} + z^*_{k_1}z^*_{k_2}z^*_{k_3}z^*_{k_4}\\
F :=& \frac{z_{j_1}z_{j_2}z_{j_3}z_{j_4}}{-i(\omega_{j_1}+\omega_{j_2}+\omega_{j_3}+\omega_{j_4})} + 4\frac{z^*_{j_1}z_{j_2}z_{j_3}z_{j_4}}{-i(-\omega_{j_1}+\omega_{j_2}+\omega_{j_3}+\omega_{j_4})} + 4\frac{z^*_{j_1}z^*_{j_2}z^*_{j_3}z_{j_4}}{-i(-\omega_{j_1}-\omega_{j_2}-\omega_{j_3}+\omega_{j_4})}+\\
&+\frac{z^*_{j_1}z^*_{j_2}z^*_{j_3}z^*_{j_4}}{-i(-\omega_{j_1}-\omega_{j_2}-\omega_{j_3}-\omega_{j_4})}\\
\Delta'_4(k_1,\ldots,k_4) :=& \Delta_4 - \delta_{k_1+k_2,\,k_3+k_4}\delta_{k_1,\,k_3} - \delta_{k_1+k_2,\,k_3+k_4}\delta_{k_2,\,k_3} - \delta_{k_1+k_3,\,k_2+k_4}\delta_{k_2,\,k_3} - \delta_{k_1+k_4,\,k_2+k_3}\delta_{k_1,\,k_3}\\
\Delta'_4(j_1,\ldots,j_4) :=& \Delta_4 - \delta_{j_1+j_2,\,j_3+j_4}\delta_{j_1,\,j_3} - \delta_{j_1+j_2,\,j_3+j_4}\delta_{j_2,\,j_3} - \delta_{j_1+j_3,\,j_2+j_4}\delta_{j_2,\,j_3} - \delta_{j_1+j_4,\,j_2+j_3}\delta_{j_1,\,j_3}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Si possono osservare fin d'ora alcune analogie con la media $\langle H_4\rangle$ calcolata nel capitolo 2. Si può notare innanzitutto come - valendo la linearità per le parentesi di Poisson - l'integrando consista di un polinomio nelle variabili $z$, $z^*$ che si compone con il flusso, come era già avvenuto per $\langle H_4\rangle$. In questo caso il polinomio è però di grado 6, in quanto ottenuto a partire da $H_4 - \langle H_4\rangle$ e $G_1$, entrambi di grado 4, tramite parentesi di Poisson, che abbassano il grado di 2. Si nota inoltre che la variabile di integrazione $r$ compare solo in seguito alla composizione con il flusso $\phi^r_{H_2}$ e sempre nella stessa forma, ovvero dando origine ad un esponenziale $e^{i\lambda r}$ con $\lambda$ combinazione lineare delle $\omega$ con coefficienti $\pm1$. Anche in questo caso, le $\omega$ dipendono da indici che sono vincolati da selettori, qui due anziché uno (uno ereditato da $H_4 - \langle H_4\rangle$, l'altro da $G_1$). Si nota dunque una struttura molto simile a quella già affrontata nel Capitolo 2: si cercherà di rendere evidente l'analogia in modo tale da sfruttare le strategie già utilizzate per il calcolo di $\langle H_4\rangle$.

Come prima cosa, si svolgono le parentesi di Poisson $\{H_4 - \langle H_4 \rangle \,, G_1\}$. Per linearità, tutti i coefficienti possono uscire ed è sufficiente calcolare le parentesi di Poisson tra i termini in $z_{k_s}$, $z^*_{k_s}$ di $H_4 - \langle H_4 \rangle$ e quelli in $z_{j_s}$, $z^*_{j_s}$ di $G_1$. Nello svolgere i conti, si è tenuto conto del fatto che i termini risultanti compariranno poi all'interno di una sommatoria sugli indici $k_s$ e $j_s$ (con $s = 1 \ldots 4$): questo permette di sfruttare la simmetria per scambio di indici $k_s$ e quella per scambio di indici $j_s$, in base alle quali alcuni dei termini risultanti possono essere sommati. Si riporta già il risultato in questa forma semplificata. Per comodità, si sono inoltre raggruppati i termini in quattro blocchi.

Da $\{E,\, F\}$:

1. $\{z_{k_1} z_{k_2} z_{k_3} z_{k_4},\, z_{j_1} z_{j_2} z_{j_3} z_{j_4}\} = 0$
2. $\{z^*_{k_1} z^*_{k_2} z^*_{k_3} z^*_{k_4},\, z^*_{j_1} z^*_{j_2} z^*_{j_3} z^*_{j_4}\} = 0$
3. $\{z_{k_1} z_{k_2} z_{k_3} z_{k_4},\, z^*_{j_1} z_{j_2} z_{j_3} z_{j_4}\} \sim -i\,(4\delta_{k_1,\,j_1} z_{k_2} z_{k_3} z_{k_4} z_{j_2} z_{j_3} z_{j_4})$
4. $\{z^*_{k_1} z^*_{k_2} z^*_{k_3} z^*_{k_4},\, z^*_{j_1} z^*_{j_2} z^*_{j_3} z_{j_4}\} \sim -i\,(4\delta_{k_1,\,j_4} z^*_{k_2} z^*_{k_3} z^*_{k_4} z^*_{j_1} z^*_{j_2} z^*_{j_3})$
5. $\{z^*_{k_1} z_{k_2} z_{k_3} z_{k_4},\, z_{j_1} z_{j_2} z_{j_3} z_{j_4}\} \sim -i\,(4\delta_{k_1,\,j_1} z_{k_2} z_{k_3} z_{k_4} z_{j_2} z_{j_3} z_{j_4})$
6. $\{z^*_{k_1} z^*_{k_2} z^*_{k_3} z_{k_4},\, z^*_{j_1} z^*_{j_2} z^*_{j_3} z^*_{j_4}\} \sim -i\,(4\delta_{k_4,\,j_1} z^*_{k_1} z^*_{k_2} z^*_{k_3} z^*_{j_2} z^*_{j_3} z^*_{j_4})$
7. $\{z_{k_1} z_{k_2} z_{k_3} z_{k_4},\, z^*_{j_1} z^*_{j_2} z^*_{j_3} z_{j_4}\} \sim -i\,(12\delta_{k_1,\,j_1} z_{k_2} z_{k_3} z_{k_4} z^*_{j_2} z^*_{j_3} z_{j_4})$
8. $\{z_{k_1} z_{k_2} z_{k_3} z_{k_4},\, z^*_{j_1} z^*_{j_2} z^*_{j_3} z^*_{j_4}\} \sim -i\,(16\delta_{k_1,\,j_1} z_{k_2} z_{k_3} z_{k_4} z^*_{j_2} z^*_{j_3} z^*_{j_4})$
9. $\{z^*_{k_1} z^*_{k_2} z^*_{k_3} z^*_{k_4},\, z^*_{j_1} z_{j_2} z_{j_3} z_{j_4}\} \sim -i\,(-12\delta_{k_1,\,j_4} z^*_{k_2} z^*_{k_3} z^*_{k_4} z^*_{j_1} z_{j_2} z_{j_3})$
10. $\{z^*_{k_1} z^*_{k_2} z^*_{k_3} z^*_{k_4},\, z_{j_1} z_{j_2} z_{j_3} z_{j_4}\} \sim -i\,(-16\delta_{k_1,\,j_1} z^*_{k_2} z^*_{k_3} z^*_{k_4} z_{j_2} z_{j_3} z_{j_4})$
11. $\{z^*_{k_1} z_{k_2} z_{k_3} z_{k_4},\, z^*_{j_1} z_{j_2} z_{j_3} z_{j_4}\} \sim -i\,(3\delta_{k_2,\,j_1} z^*_{k_1} z_{k_3} z_{k_4} z_{j_2} z_{j_3} z_{j_4} - 3\delta_{k_1,\,j_2} z^*_{j_1} z_{k_2} z_{k_3} z_{k_4} z_{j_3} z_{j_4})$
12. $\{z^*_{k_1} z_{k_2} z_{k_3} z_{k_4},\, z^*_{j_1} z^*_{j_2} z^*_{j_3} z_{j_4}\} \sim -i\,(-\delta_{k_1,\,j_4} z_{k_2} z_{k_3} z_{k_4} z^*_{j_1} z^*_{j_2} z^*_{j_3} + 9\delta_{k_2,\,j_1} z^*_{k_1} z^*_{j_2} z^*_{j_3} z_{k_3} z_{k_4} z_{j_4})$
13. $\{z^*_{k_1} z_{k_2} z_{k_3} z_{k_4},\, z^*_{j_1} z^*_{j_2} z^*_{j_3} z^*_{j_4}\} \sim -i\,(12\delta_{k_2,\,j_1} z^*_{k_1} z^*_{j_2} z^*_{j_3} z^*_{j_4} z_{k_3} z_{k_4})$
14. $\{z^*_{k_1} z^*_{k_2} z^*_{k_3} z_{k_4},\, z^*_{j_1} z^*_{j_2} z^*_{j_3} z_{j_4}\} \sim -i\,(+3\delta_{k_4,\,j_1} z^*_{k_1} z^*_{k_2} z^*_{k_3} z^*_{j_2} z^*_{j_3} z_{j_4} - 3\delta_{k_1,\,j_4} z^*_{k_2} z^*_{k_3} z^*_{j_1} z^*_{j_2} z^*_{j_3} z_{k_4})$
15. $\{z^*_{k_1} z^*_{k_2} z^*_{k_3} z_{k_4},\, z^*_{j_1} z_{j_2} z_{j_3} z_{j_4}\} \sim -i\,(\delta_{k_4,\,j_1} z^*_{k_1} z^*_{k_2} z^*_{k_3} z_{j_2} z_{j_3} z_{j_4} - 9\delta_{k_1,\,j_2} z^*_{k_2} z^*_{k_3} z^*_{j_1} z_{k_4} z_{j_3} z_{j_4})$
16. $\{z^*_{k_1} z^*_{k_2} z^*_{k_3} z_{k_4},\, z_{j_1} z_{j_2} z_{j_3} z_{j_4}\} \sim -i\,(-12\delta_{k_1,\,j_1} z^*_{k_2} z^*_{k_3} z_{k_4} z_{j_2} z_{j_3} z_{j_4})$

Da $\{E,\, z^*_{j_1} z^*_{j_2} z_{j_3} z_{j_4}\}$:

1. $\{z_{k_1} z_{k_2} z_{k_3} z_{k_4},\, z^*_{j_1} z^*_{j_2} z_{j_3} z_{j_4}\} \sim -i\,(8\delta_{k_1,\,j_1} z^*_{j_2} z_{k_2} z_{k_3} z_{k_4} z_{j_3} z_{j_4})$
2. $\{z^*_{k_1} z_{k_2} z_{k_3} z_{k_4},\, z^*_{j_1} z^*_{j_2} z_{j_3} z_{j_4}\} \sim -i\,(6\delta_{k_2,\,j_1} z^*_{k_1} z^*_{j_2} z_{k_3} z_{k_4} z_{j_3} z_{j_4} - 2\delta_{k_1,\,j_3} z^*_{j_1} z^*_{j_2} z_{k_2} z_{k_3} z_{k_4} z_{j_4})$
3. $\{z^*_{k_1} z^*_{k_2} z^*_{k_3} z_{k_4},\, z^*_{j_1} z^*_{j_2} z_{j_3} z_{j_4}\} \sim -i\,(2\delta_{k_4,\,j_1} z^*_{k_1} z^*_{k_2} z^*_{k_3} z^*_{j_2} z_{j_3} z_{j_4} - 6\delta_{k_1,\,j_3} z^*_{k_2} z^*_{k_3} z^*_{j_1} z^*_{j_2} z_{k_4} z_{j_4})$
4. $\{z^*_{k_1} z^*_{k_2} z^*_{k_3} z^*_{k_4},\, z^*_{j_1} z^*_{j_2} z_{j_3} z_{j_4}\} \sim -i\,(-8\delta_{k_1,\,j_3} z^*_{k_2} z^*_{k_3} z^*_{k_4} z^*_{j_1} z^*_{j_2} z_{j_4})$

Da $\{z^*_{k_1} z^*_{k_2} z_{k_3} z_{k_4},\, F\}$:

1. $\{z^*_{k_1} z^*_{k_2} z_{k_3} z_{k_4},\, z_{j_1} z_{j_2} z_{j_3} z_{j_4}\} \sim -i\,(-8\delta_{k_1,\,j_1} z^*_{k_2} z_{k_3} z_{k_4} z_{j_2} z_{j_3} z_{j_4})$
2. $\{z^*_{k_1} z^*_{k_2} z_{k_3} z_{k_4},\, z^*_{j_1} z_{j_2} z_{j_3} z_{j_4}\} \sim -i\,(-6\delta_{k_1,\,j_2} z^*_{k_2} z^*_{j_1} z_{k_3} z_{k_4} z_{j_3} z_{j_4} + 2\delta_{k_3,\,j_1} z^*_{k_1} z^*_{k_2} z_{k_4} z_{j_2} z_{j_3} z_{j_4})$
3. $\{z^*_{k_1} z^*_{k_2} z_{k_3} z_{k_4},\, z^*_{j_1} z^*_{j_2} z^*_{j_3} z_{j_4}\} \sim -i\,(-2\delta_{k_1,\,j_4} z^*_{k_2} z^*_{j_1} z^*_{j_2} z^*_{j_3} z_{k_3} z_{j_4} + 6\delta_{k_3,\,j_1} z^*_{k_1} z^*_{k_2} z^*_{j_2} z^*_{j_3} z_{k_4} z_{j_4})$
4. $\{z^*_{k_1} z^*_{k_2} z_{k_3} z_{k_4},\, z^*_{j_1} z^*_{j_2} z^*_{j_3} z^*_{j_4}\} \sim -i\,(8\delta_{k_3,\,j_1} z^*_{k_1} z^*_{k_2} z^*_{j_2} z^*_{j_3} z^*_{j_4} z_{k_4})$

Da $\{z^*_{k_1} z^*_{k_2} z_{k_3} z_{k_4},\, z^*_{j_1} z^*_{j_2} z_{j_3} z_{j_4}\}$:

1. $\{z^*_{k_1} z^*_{k_2} z_{k_3} z_{k_4},\, z^*_{j_1} z^*_{j_2} z_{j_3} z_{j_4}\} \sim -i\,(4\delta_{k_3,\,j_1} z^*_{k_1} z^*_{k_2} z^*_{j_2} z_{k_4} z_{j_3} z_{j_4} - 4\delta_{k_1,\,j_3} z^*_{k_2} z^*_{j_1} z^*_{j_2} z_{k_3} z_{k_4} z_{j_4})$

Come già anticipato, ciascuno dei termini appena riportati è moltiplicato per un certo numero di coefficienti: sono quelli che compaiono nelle espressioni per $H_4 - \langle H_4 \rangle$ e per $G_1$ a pag. 11. In particolare, si osservi come il fattore moltiplicativo costituito dai selettori dipenda dal blocco a cui il termine appartiene:

- i termini risultanti dal blocco $\{E,\, F\}$ sono moltiplicati per $\Delta_4(k_1, \ldots, k_4)\ \Delta_4(j_1, \ldots, j_4)$

- i termini risultanti dal blocco $\{E,\, z^*_{j_1} z^*_{j_2} z_{j_3} z_{j_4}\}$ sono moltiplicati per $\Delta_4(k_1,\dots,k_4)\,\Delta'_4(j_1,\dots,j_4)$
- i termini risultanti dal blocco $\{z^*_{k_1} z^*_{k_2} z_{k_3} z_{k_4},\, F\}$ sono moltiplicati per $\Delta'_4(k_1,\dots,k_4)\,\Delta_4(j_1,\dots,j_4)$
- i termini risultanti dal blocco $\{z^*_{k_1} z^*_{k_2} z_{k_3} z_{k_4},\, z^*_{j_1} z^*_{j_2} z_{j_3} z_{j_4}\}$ sono moltiplicati per $\Delta'_4(k_1,\dots,k_4)$ $\Delta'_4(j_1,\dots,j_4)$

In base al blocco di appartenenza, dunque, ciascun termine si troverà a moltiplicare tutte le possibili combinazioni $\delta(k_1,\dots,k_4)\,\delta(j_1,\dots,j_4)$ provenienti dagli opportuni selettori, oltre alla delta di Kronecker che compare dallo sviluppo delle parentesi di Poisson.
Si osservi infine come nel calcolo della media influiscano solo i termini in $z$, $z^*$ - che in seguito alla composizione con il flusso dipendono dalla variabile di integrazione - e le delta di Kronecker appena descritte, che vincolano gli indici: gli altri coefficienti possono dunque essere trascurati durante il calcolo della media e reinseriti alla fine.

Si procede dunque studiando i termini in $z$, $z^*$ risultanti dalle parentesi di Poisson. Si osserva che tali termini possono essere ricondotti a soli sei casi, tramite raggruppamento di termini che differiscono per scambio di $z$ e $z^*$ oppure per scambio di tutte le $k_s$ con tutte le $j_s$. Ciascuno di questi sei casi è associato ad un esponenziale $e^{i\lambda r}$ e quindi ad una condizione $\lambda = 0$ che deve essere verificata perchè il termine dia un contributo significativo:

$$z_A z_B z_C z_\alpha z_\beta z_\gamma \delta_{D,\delta} \qquad -\omega_A - \omega_B - \omega_C - \omega_\alpha - \omega_\beta - \omega_\gamma = 0 \tag{4.5}$$
$$z^*_A z_B z_C z_\alpha z_\beta z_\gamma \delta_{D,\delta} \qquad \omega_A - \omega_B - \omega_C - \omega_\alpha - \omega_\beta - \omega_\gamma = 0 \tag{4.6}$$

$$z^*_A z^*_B z_C z_\alpha z_\beta z_\gamma \delta_{D,\delta} \qquad \omega_A + \omega_B - \omega_C - \omega_\alpha - \omega_\beta - \omega_\gamma = 0 \tag{4.7a}$$
$$z^*_A z^*_\alpha z_B z_C z_\beta z_\gamma \delta_{D,\delta} \qquad \omega_A + \omega_\alpha - \omega_B - \omega_C - \omega_\beta - \omega_\gamma = 0 \tag{4.7b}$$

$$z^*_A z^*_B z^*_C z_\alpha z_\beta z_\gamma \delta_{D,\delta} \qquad \omega_A + \omega_B + \omega_C - \omega_\alpha - \omega_\beta - \omega_\gamma = 0 \tag{4.8a}$$
$$z^*_A z^*_B z^*_\alpha z_C z_\beta z_\gamma \delta_{D,\delta} \qquad \omega_A + \omega_B + \omega_\alpha - \omega_C - \omega_\beta - \omega_\gamma = 0 \tag{4.8b}$$

ove gli indici $A$, $B$, $C$, $D$ sostituiscono gli indici $k_s$, mentre gli indici $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ sostituiscono gli indici $j_s$. Si è scelta questa notazione ricordando che nell'espressione per il termine al secondo ordine (4.1) compaiono due selettori distinti, uno funzione delle $k_s$ e l'altro funzione delle $j_s$, entrambi nella stessa forma e completamente simmetrici. Ne risulta che gli indici $k_s$ possono essere scambiati tra di loro senza che il selettore ne risenta, e così pure gli indici $j_s$, ma le due famiglie non possono essere mescolate. Si noti che senza questa distinzione, le equazioni (4.7) sarebbero identiche, e così pure le (4.8).

Ci si trova ora in modo più evidente in una situazione analoga a quella già affrontata nel Capitolo 2. Anche in questo caso il calcolo della media è stato ricondotto allo studio di pochi termini, ciascuno dei quali dà contributo non nullo solo se è verificata una specifica equazione $\lambda = 0$, con $\lambda$ combinazione lineare di un certo numero di $\omega$ con coefficienti $\pm 1$ e con le $\omega$ vincolate da due delta di Kronecker, una relativa agli indici $A \dots D$, l'altra agli indici $\alpha \dots \delta$. In questo caso compare inoltre un ulteriore vincolo $\delta_{D,\delta}$ derivante dallo svolgimento delle parentesi di Poisson. Come naturale differenza rispetto al calcolo di $\langle H_4 \rangle$, qui le $\lambda$ sono combinazioni lineari di sei $\omega$ anziché quattro, come già anticipato. In ogni caso, la procedura da applicare per il calcolo della media desiderata è esattamente la stessa già utilizzata in precedenza:

- si considera ciascuna delle sei equazioni (4.5) ... (4.8b)
- per ogni equazione, si considerano tutte le possibili combinazioni di delta di Kronecker $\delta(A,\dots,D)\delta(\alpha,\dots,\delta)\delta_{D,\delta}$ che possono fungere da vincolo
- per ogni combinazione, si sfruttano le delta di Kronecker per scrivere uno degli indici in funzione degli altri cinque.

- si sostituisce nell'equazione di partenza, ottenendone una nuova dipendente da soli cinque indici. In questa fase - come già fatto nel Capitolo 2 - si cerca di raggruppare le combinazioni di delta di Kronecker che danno origine alla stessa equazione a cinque indici. Nel Capitolo 2 si era partiti dai termini del selettore privi di $2N$, si era completato il loro studio e si era quindi passati ai termini rimasti, cercando di ricondurli alle equazioni già studiate ed eventualmente aggiungendone di nuove quando questo non era possibile. In questo Capitolo si è invece preferita una procedura più sistematica:
  - partendo dall'equazione iniziale che si sta considerando, si decide quale degli indici andrà scritto in funzione degli altri cinque; la sostituzione avverrà sempre su quell'indice, indipendentemente dalla combinazione di delta di Kronecker coinvolta
  - si elencano tutti i possibili modi in cui l'indice scelto può essere scritto in funzione degli altri cinque, sapendo che i vincoli sono quelli lineari offerti dalle delta di Kronecker. In questa fase è possibile sfruttare le simmetrie dell'equazione per scambio di indici, in modo da ridurre il numero di equazioni finali da studiare. E' importante però non coinvolgere negli scambi quell'indice che si è scelto di sostituire (altrimenti diventa complicato trattare i termini dei selettori in cui compaiono i $2N$)
  - si risolvono le equazioni in cinque indici elencate, sfruttando la solita tecnica per ricondursi ad equazioni algebriche
  - si studia l'accettabilità delle soluzioni. E' utile fare la seguente osservazione: le soluzioni coinvolgono sempre e solo le cinque variabili $v$, $w$, $x$, $y$, $z$, che sono sempre nella forma $e^{i\frac{\pi I}{2N}}$ dove I è un generico indice, numero naturale compreso tra 1 ed $N-1$. Questo vale per ogni equazione e indipendentemente dalle delta di Kronecker che le danno origine. Nella maggior parte dei casi è sufficiente questa informazione per affermare che la soluzione non è accettabile. Diventa quindi evidente il vantaggio di questa procedura: è sufficiente elencare le possibili equazioni, senza preoccuparsi delle specifiche combinazioni di delta di Kronecker che le determinano ma avendo la certezza di averle considerate tutte; se studiando le equazioni si trova che le soluzioni non sono mai accettabili, questo varrà indipendentemente dalle combinazioni di delta di Kronecker originarie, che non è quindi necessario elencare esplicitamente. Solo nel caso in cui le soluzioni in $v$, $w$, $x$, $y$, $z$ risultino accettabili, diventa necessario ricostruire quali combinazioni di delta di Kronecker erano loro associate: vincoli diversi sull'indice che era stato sostituito possono rendere la soluzione complessiva accettabile in alcuni casi e non accettabile in altri
- in base alle soluzioni accettabili trovate, si ricostruiscono i termini che effettivamente contribuiscono alla media e si completa il calcolo.

## 4.2 Prima equazione

Si parte dallo studio della prima equazione (4.5): $-\omega_A-\omega_B-\omega_C-\omega_\alpha-\omega_\beta-\omega_\gamma=0$. Tale equazione è banale: dato che le $\omega$ sono per definizione tutte positive, una loro combinazione lineare con coefficienti tutti concordi non potrà mai annullarsi. Non esistono dunque soluzioni accettabili.

## 4.3 Seconda equazione

Si prosegue con lo studio dell'equazione (4.6): $\omega_A-\omega_B-\omega_C-\omega_\alpha-\omega_\beta-\omega_\gamma=0$. Scrivendo di volta in volta l'indice $A$ come funzione degli altri cinque indici e poi passando alle variabili $v$, $w$, $x$, $y$, $z$, definite nel solito modo, si trovano le seguenti equazioni algebriche:

$$v = e^{i\frac{\pi B}{2N}} \qquad w = e^{i\frac{\pi C}{2N}} \qquad x = e^{i\frac{\pi \alpha}{2N}} \qquad y = e^{i\frac{\pi \beta}{2N}} \qquad z = e^{i\frac{\pi \gamma}{2N}}$$

$$\mathcal{F}(v,\, w,\, x,\, y,\, z) - \left(v - \frac{1}{v}\right) - \left(w - \frac{1}{w}\right) - \left(x - \frac{1}{x}\right) - \left(y - \frac{1}{y}\right) - \left(z - \frac{1}{z}\right) = 0$$

con $\mathcal{F}$ che assume i seguenti valori:

$$\mathcal{F}(v,\, w,\, x,\, y,\, z) \in \left\{ \left(vwxyz - \frac{1}{vwxyz}\right), \left(\frac{1}{vwxyz} - vwxyz\right), \left(\frac{v}{wxyz} - \frac{wxyz}{v}\right), \left(\frac{wxyz}{v} - \frac{v}{wxyz}\right), \left(\frac{vw}{xyz} - \frac{xyz}{vw}\right), \left(\frac{xyz}{vw} - \frac{vw}{xyz}\right) \right\}$$

Si osserva anche qui una struttura analoga a quella trovata studiando il termine al primo ordine della forma normale. Anche in questo caso le equazioni sono tutte di secondo grado rispetto a ciascuna delle variabili $v$, $w$, $x$, $y$, $z$, avendo grado massimo pari a uno sia a numeratore che a denominatore. Questo fatto - come anticipato nella Sezione 2.3 - dipende dalla struttura sinusoidale delle $\omega$ di partenza e dalla linearità delle relazioni tra gli indici, dunque è una caratteristica trasversale che si ripresenta a tutti gli ordini. In questo caso però, a differenza di quanto trovato nello studio del termine al primo ordine, le equazioni non sono più fattorizzabili: in nessuno dei casi trattati - qui e in seguito - sarà possibile trovare esclusivamente soluzioni banali, come succedeva invece al primo ordine con la procedura suggerita da B. Rink (si veda la Sezione 2.3). Per cercare le soluzioni, si sono dunque scritte di volta in volta le equazioni come equazioni di secondo grado rispetto a ciascuna variabile, con coefficienti dipendenti dalle altre quattro variabili, ora viste come parametri. In questo modo ciascuna equazione presenta due tipi di soluzioni: quelle in cui i quattro parametri sono tali da annullare i coefficienti dell'equazione di secondo grado, e quelle in cui i coefficienti sono tutti non nulli e valgono le usuali soluzioni delle equazioni di secondo grado. Le soluzioni del secondo tipo possono sempre essere scritte, ma è in genere difficile verificarne l'accettabilità, che richiede uno studio numerico a parte. Come già fatto per lo studio al primo ordine, sarebbe necessario verificare che le soluzioni abbiano modulo 1 e in particolare che siano scrivibili nella forma $e^{i\frac{\pi I}{2N}}$, con $I$ indice naturale compreso tra 1 ed $N-1$. Data la complessità di tale analisi, in questo elaborato si è deciso di limitare lo studio alla ricerca di soluzioni del primo tipo, che presentano invece una struttura banale, la cui accettabilità è verificabile in modo immediato. Questo limita naturalmente i risultati ottenibili: si proseguirà con la ricerca del termine al secondo ordine della forma normale, sapendo però che tale forma potrebbe essere incompleta, mancando gli eventuali contributi derivanti dalle soluzioni del secondo tipo. Si noti comunque che, data la linearità del problema trattato, per passare dalla forma al secondo ordine ricavata in questo studio a quella esatta e completa sarebbe sufficiente aggiungere i termini mancanti, senza dover modificare ulteriormente i risultati già ottenuti. Per quanto riguarda poi gli obiettivi proposti in questo elaborato (si veda la Sezione 1.2), è comunque possibile indagare quanto segue: se la forma al secondo ordine ricavata in questo studio, una volta scritta in variabili azione-angolo, presentasse dipendenze dagli angoli, sarebbe già possibile affermare che all'ordine $\mathcal{O}(g^2)$ le azioni smettono di essere costanti del moto, e il sistema inizia a deviare dalla situazione precedente verso l'equipartizione. Se invece la dipendenza dagli angoli non comparisse, si potrebbero trarre solo conclusioni parziali: non si può escludere che la tendenza all'equipartizione cominci a manifestarsi già al secondo ordine, ma - se questo avvenisse - sarebbe da attribuire esclusivamente a quei contributi derivanti dalle soluzioni del secondo tipo, qui trascurate. Per completare lo studio sarebbe quindi sufficiente indagare l'accettabilità di tali soluzioni e la dipendenza dagli angoli dei termini eventualmente associati.
Si prosegue dunque lo studio, riferendosi nel seguito alle soluzioni e alla ricerca della forma normale nel senso appena specificato. Si ricorda che la presenza di soluzioni del secondo tipo - trascurate - riguarda tutte le equazioni studiate in questa Sezione e nel seguito.

Tornando allo studio dell'equazione (4.6), si trova che ciascuna delle equazioni sopra elencate presenta solo soluzioni non accettabili, che - come anticipato - possono essere scartate semplicemente ricordando che le variabili $v$, $w$, $x$, $y$, $z$ sono nella forma $e^{i\frac{\pi I}{2N}}$, dove I è un generico indice, numero naturale compreso tra 1 ed $N-1$. Si può quindi affermare che, tra tutti i termini risultanti dal calcolo della parentesi di Poisson $\{H_4 - \langle H_4\rangle\,,\, G_1\}$, quelli associati all'equazione (4.6) danno sempre contributo nullo una volta mediati.

## 4.4 Terza equazione

Si passa allo studio della terza equazione (4.7a): $\omega_A + \omega_B - \omega_C - \omega_\alpha - \omega_\beta - \omega_\gamma = 0$. Come prima, si elencano le equazioni algebriche ottenibili, in questo caso scegliendo di scrivere l'indice $C$ in funzione degli altri cinque:

$$v = e^{i\frac{\pi A}{2N}} \qquad w = e^{i\frac{\pi B}{2N}} \qquad x = e^{i\frac{\pi\alpha}{2N}} \qquad y = e^{i\frac{\pi\beta}{2N}} \qquad z = e^{i\frac{\pi\gamma}{2N}}$$

$$\left(v - \frac{1}{v}\right) + \left(w - \frac{1}{w}\right) - \mathcal{F}(v,\, w,\, x,\, y,\, z) - \left(x - \frac{1}{x}\right) - \left(y - \frac{1}{y}\right) - \left(z - \frac{1}{z}\right) = 0$$

con $\mathcal{F}(v,\, w,\, x,\, y,\, z)$ che assume i seguenti valori:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(v,\, w,\, x,\, y,\, z) \in \Bigg\{ &\left(vwxyz - \frac{1}{vwxyz}\right), \left(\frac{1}{vwxyz} - vwxyz\right), \left(\frac{v}{wxyz} - \frac{wxyz}{v}\right), \left(\frac{x}{vwyz} - \frac{vwyz}{x}\right), \\ &\left(\frac{wxyz}{v} - \frac{v}{wxyz}\right), \left(\frac{vwyz}{x} - \frac{x}{vwyz}\right), \left(\frac{vw}{xyz} - \frac{xyz}{vw}\right), \left(\frac{vx}{wyz} - \frac{wyz}{vx}\right), \\ &\left(\frac{xy}{vwz} - \frac{1}{vwz}\right), \left(\frac{xyz}{vw} - \frac{vw}{xyz}\right), \left(\frac{wyz}{vx} - \frac{vx}{wyz}\right), \left(\frac{vwz}{xy} - \frac{vwz}{xy}\right) \Bigg\}\end{aligned}$$

In questo caso alcune delle equazioni presentano soluzioni accettabili:

1. $\mathcal{F}(v,\, w,\, x,\, y,\, z) = \left(\frac{vw}{xyz} - \frac{xyz}{vw}\right)$ ha soluzioni:
   $v = x, \quad w = y, \quad z$ qualunque; $\qquad \wedge \qquad$ tutte le permutazioni di $x,\, y,\, z$;
2. $\mathcal{F}(v,\, w,\, x,\, y,\, z) = \left(\frac{vx}{wyz} - \frac{wyz}{vx}\right)$ ha soluzioni:
   $v = y, \quad x = w, \quad z$ qualunque; $\qquad \wedge \qquad v = z, \quad x = w, \quad y$ qualunque;
3. $\mathcal{F}(v,\, w,\, x,\, y,\, z) = \left(\frac{xy}{vwz} - \frac{1}{vwz}\right)$ ha soluzioni:
   $x = v, \quad y = w, \quad z$ qualunque; $\qquad \wedge \qquad x = w, \quad y = v, \quad z$ qualunque;

Per proseguire con lo studio, conviene ora descrivere in modo esplicito in quali casi ci si trova in presenza delle tre equazioni appena elencate. Si ricorda che la procedura utilizzata prevedeva di partire dall'equazione (4.7a), considerare tutte le combinazioni di delta di Kronecker che possono vincolarla, utilizzare tali combinazioni per scrivere l'indice $C$ in funzione degli altri indici e quindi passare alle variabili $v,\, w,\, x,\, y,\, z$. In questo modo, solo alcune delle combinazioni di delta di Kronecker condurranno alle tre equazioni individuate come utili, mentre negli altri casi si otterranno le equazioni prive di risultati accettabili.
E' quindi necessario individuare le combinazioni di delta di Kronecker che portano ai tre casi con soluzione accettabile. Prima di procedere in tale senso, è conveniente riportare la seguente osservazione. Si consideri la prima delle tre equazioni (l'osservazione varrà in modo analogo anche per le altre due). Ricordando come essa è stata costruita e come sono strutturate le delta di Kronecker, si trova che il termine $\left(\frac{vw}{xyz} - \frac{xyz}{vw}\right)$ può essere ottenuto solo a partire dalle seguenti espressioni per l'indice sostituito:

$$C = A + B - (\alpha + \beta + \gamma) \qquad C = A + B - (\alpha + \beta + \gamma) \pm 4N \qquad C = -(A + B) + (\alpha + \beta + \gamma) \pm 2N$$

Su queste espressioni si vanno a imporre le soluzioni trovate. Data la natura banale delle soluzioni, si trova che in tutti i casi due coppie di indici si elidono, riducendo i vincoli ai seguenti tre:

$$C = -I \qquad C = -I \pm 4N \qquad C = -I \pm 2N$$

ove $I$ è l'indice che non ha subìto elisione. Ricordando che gli indici sono naturali compresi tra 1 ed $N-1$, si trova che nessuna delle tre relazioni è accettabile.

L'equazione (4.7a) studiata in questa sezione è dunque sempre priva di soluzioni accettabili, qualunque siano le combinazioni di delta di Kronecker in gioco. Tra i termini risultanti dal calcolo della parentesi di Poisson $\{H_4 - \langle H_4\rangle \,,\, G_1\}$, quelli associati questa equazione danno sempre contributo nullo una volta mediati.

## 4.5 Quarta equazione

L'equazione (4.7b): $\omega_A + \omega_\alpha - \omega_B - \omega_C - \omega_\beta - \omega_\gamma = 0$ può essere trattata esattamente come la (4.7a) appena studiata. Passando alle variabili $v$, $w$, $x$, $y$, $z$ definite da:

$$v = e^{i\frac{\pi A}{2N}} \qquad w = e^{i\frac{\pi \alpha}{2N}} \qquad x = e^{i\frac{\pi C}{2N}} \qquad y = e^{i\frac{\pi \beta}{2N}} \qquad z = e^{i\frac{\pi \gamma}{2N}}$$

si ricavano le stesse equazioni algebriche e si trovano le stesse soluzioni accettabili in $v$, $w$, $x$, $y$, $z$. Può essere replicata anche l'osservazione finale, che ha permesso di dimostrare come anche le soluzioni in prima battuta accettabili fossero in realtà da scartare. Anche in questo caso, i termini risultanti dalle parentesi di Poisson che venivano ricondotti a questa equazione si annullano una volta mediati.

## 4.6 Quinta equazione

Si passa all'equazione (4.8a): $\omega_A + \omega_B + \omega_C - \omega_\alpha - \omega_\beta - \omega_\gamma = 0$. Si è scelto di scrivere l'indice $A$ in funzione degli altri cinque, passando poi nel solito modo alle equazioni algebriche:

$$v = e^{i\frac{\pi B}{2N}} \qquad w = e^{i\frac{\pi C}{2N}} \qquad x = e^{i\frac{\pi \alpha}{2N}} \qquad y = e^{i\frac{\pi \beta}{2N}} \qquad z = e^{i\frac{\pi \gamma}{2N}}$$

$$\mathcal{F}(v,\, w,\, x,\, y,\, z) + \left(v - \frac{1}{v}\right) + \left(w - \frac{1}{w}\right) - \left(x - \frac{1}{x}\right) - \left(y - \frac{1}{y}\right) - \left(z - \frac{1}{z}\right) = 0$$

ove $\mathcal{F}(v,\, w,\, x,\, y,\, z)$ assume i seguenti valori:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(v,\, w,\, x,\, y,\, z) \in \Bigg\{ & \left(vwxyz - \frac{1}{vwxyz}\right), \left(\frac{1}{vwxyz} - vwxyz\right), \left(\frac{wxyz}{v} - \frac{v}{wxyz}\right), \left(\frac{vwyz}{x} - \frac{x}{vwyz}\right), \\ & \left(\frac{v}{wxyz} - \frac{wxyz}{v}\right), \left(\frac{x}{vwyz} - \frac{vwyz}{x}\right), \left(\frac{xyz}{vw} - \frac{vw}{xyz}\right), \left(\frac{wyz}{vx} - \frac{vx}{wyz}\right), \\ & \left(\frac{vwz}{xy} - \frac{xy}{vwz}\right), \left(\frac{vw}{xyz} - \frac{xyz}{vw}\right), \left(\frac{vx}{wyz} - \frac{wyz}{vx}\right), \left(\frac{xy}{vwz} - \frac{vwz}{xy}\right) \Bigg\}\end{aligned}$$

Raccogliendo un fattore $-1$ nel primo termine di ciascuna equazione si trova che le equazioni elencate sono le stesse già studiate in (4.7a). Si individuano quindi le tre che forniscono soluzioni accettabili. Ricordando che le variabili $v$, $w$, $x$, $y$, $z$ erano definite in funzione delle $B$, $C$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, si possono già riportare le soluzioni alle variabili originali [1]:

1. $\mathcal{F}(v,\, w,\, x,\, y,\, z) = \left(\frac{xyz}{vw} - \frac{vw}{xyz}\right)$ ha soluzioni:
   (a) $v = x, \quad w = y, \quad z$ qualunque $\quad\Rightarrow\quad B = \alpha, \quad C = \beta, \quad \gamma$ qualunque
   (b) tutte le permutazioni di $x$, $y$, $z$ $\quad\Rightarrow\quad$ tutte le permutazioni di $\alpha$, $\beta$, $\gamma$

[1] Si ricorda che l'equazione (4.8a) in studio in questa Sezione differisce dall'equazione (4.7a) studiata in precedenza solo per il modo in cui ciascun indice è associato alle variabili $v$, $w$, $x$, $y$, $z$. Ne consegue che le soluzioni in $v$, $w$, $x$, $y$, $z$ sono le stesse nei due casi, mentre cambia il modo in cui tali soluzioni vengono riportate agli indici originali. Ne consegue che soluzioni che prima erano non accettabili possono ora risultare valide.

2. $\mathcal{F}(v,\, w,\, x,\, y,\, z) = \left(\frac{wyz}{vx} - \frac{vx}{wyz}\right)$ ha soluzioni:

   (a) $v = y, \quad x = w, \quad z$ qualunque $\quad \Rightarrow \quad B = \beta, \quad \alpha = C, \quad \gamma$ qualunque

   (b) $v = z, \quad x = w, \quad y$ qualunque $\quad \Rightarrow \quad B = \gamma, \quad \alpha = C, \quad \beta$ qualunque

3. $\mathcal{F}(v,\, w,\, x,\, y,\, z) = \left(\frac{vwz}{xy} - \frac{xy}{vwz}\right)$ ha soluzioni:

   (a) $x = v, \quad y = w, \quad z$ qualunque $\quad \Rightarrow \quad \alpha = B, \quad \beta = C, \quad \gamma$ qualunque

   (b) $x = w, \quad y = v, \quad z$ qualunque $\quad \Rightarrow \quad \alpha = C, \quad \beta = B, \quad \gamma$ qualunque

Anche in questo caso si cerca di capire in quali situazioni si possono ottenere queste tre equazioni. Si può applicare un'osservazione simile a quella riportata nei casi precedenti. Considerando la prima delle tre equazioni, si trova che il termine $\left(\frac{xyz}{vw} - \frac{vw}{xyz}\right)$ è ottenibile solo a partire dalle tre espressioni per l'indice sostituito:

$$A = \alpha + \beta + \gamma - (B + C) \qquad A = \alpha + \beta + \gamma - (B + C) \pm 4N \qquad A = -(\alpha + \beta + \gamma) + (B + C) \pm 2N$$

che - come in precedenza - si combinano con le soluzioni trovate dando luogo ad elisione di due coppie di termini:

$$A = I \qquad A = I \pm 4N \qquad A = I \pm 2N$$

Questa volta però il primo caso risulta accettabile, mentre i due successivi sono ancora da scartare. Si verifica una situazione analoga anche per le altre due equazioni elencate, che presentano soluzioni accettabili in corrispondenza delle sostituzioni $A = C + \beta + \gamma - (B + \alpha)$ e $A = B + C + \gamma - (\alpha + \beta)$ rispettivamente.

Per ciascuna delle tre equazioni con soluzione accettabile, si cercano ora esplicitamente le combinazioni di delta di Kronecker $\delta(A, \ldots, D)\delta(\alpha, \ldots, \delta)\delta_{D,\,\delta}$ che danno origine alle uniche sostituzioni individuate come accettabili:

Tabella 4.1: Combinazioni utili di delta di Kronecker.

| | | | |
|---|---|---|---|
| equazione | $\mathcal{F}(v,\, w,\, x,\, y,\, z) = \left(\frac{xyz}{vw} - \frac{vw}{xyz}\right)$ | $\mathcal{F}(v,\, w,\, x,\, y,\, z) = \left(\frac{wyz}{vx} - \frac{vx}{wyz}\right)$ | $\mathcal{F}(v,\, w,\, x,\, y,\, z) = \left(\frac{vwz}{xy} - \frac{xy}{vwz}\right)$ |
| sostituzione | $A = \alpha + \beta + \gamma - (B + C)$ | $A = C + \beta + \gamma - (B + \alpha)$ | $A = B + C + \gamma - (\alpha + \beta)$ |
| ottenibile da | $\delta_{A+B+C,\, D}\, \delta_{\alpha+\beta+\gamma,\, \delta}\, \delta_{D,\delta}$ | $\delta_{A+B+D,\, C}\, \delta_{\beta+\gamma+\delta,\, \alpha}\, \delta_{D,\delta}$ | $\delta_{B+C+D,\, A}\, \delta_{\alpha+\beta+\delta,\, \gamma}\, \delta_{D,\delta}$ |
| | $\delta_{A+B+C,\, D+2N}\, \delta_{\alpha+\beta+\gamma,\, \delta+2N}\, \delta_{D,\delta}$ | $\delta_{A+B,\, C+D}\, \delta_{\alpha+\delta,\, \beta+\gamma}\, \delta_{D,\delta}$ | $\delta_{A+D,\, B+C}\, \delta_{\alpha+\beta,\, \gamma+\delta}\, \delta_{D,\delta}$ |
| | $\delta_{A+B+C+D,\, 2N}\, \delta_{\alpha+\beta+\gamma+\delta,\, 2N}\, \delta_{D,\delta}$ | $\delta_{A+B+D,\, C+2N}\, \delta_{\beta+\gamma+\delta,\, \alpha+2N}\, \delta_{D,\delta}$ | $\delta_{B+C+D,\, A+2N}\, \delta_{\alpha+\beta+\delta,\, \gamma+2N}\, \delta_{D,\delta}$ |

Queste sono dunque le uniche combinazioni di delta di Kronecker in corrispondenza delle quali l'equazione (4.8a) presenta soluzioni accettabili. Ne consegue che, tra i termini risultanti dallo sviluppo di Poisson $\{H_4 - \langle H_4 \rangle\,,\, G_1\}$, quelli associati all'equazione (4.8a) danno contributo non nullo alla media solo quando si trovano a moltiplicare una delle nove combinazioni di delta di Kronecker appena elencate e, per ciascuna delle combinazioni, solo quando gli indici rispettanno delle opportune condizioni, ovvero quelle offerte dalle soluzioni (1), (2), (3), riportate a pag. 17. Si può osservare come le combinazioni di delta di Kronecker siano raccolte in tre sottogruppi in base al modo in cui l'indice $A$ viene scritto in funzione degli altri cinque (ci si riferirà ai tre sottogruppi come 1, 2, 3). Si è già notato come, imponendo le soluzioni accettabili nell'espressione per $A$, si trovi sempre un risultato accettabile. All'interno di ciascun sottogruppo compaiono poi tre diverse combinazioni di delta di Kronecker, che differiscono per il modo in cui l'indice $D$ viene scritto in funzione degli indici $A$, $B$, $C$ (ci si riferirà alle tre combinazioni in ogni sottogruppo come $a$, $b$, $c$). In questo caso si dovrà verificare di volta in volta se, imponendo le soluzioni nell'espressione per $D$, si trova un'espressione accettabile o meno. Tale studio viene riportato nella tabella 4.2, con la quale si riassumono quindi tutte le combinazioni di indici che permettono di ottenere contributo non nullo, partendo da termini associati all'equazione (4.8a) in esame.

Tabella 4.2: Combinazioni di indici ammesse per termini dello sviluppo di Poisson associati all'equazione (4.8a). I numeri 1, 2, 3 fanno riferimento ai tre sottogruppi individuati nel testo. Le lettere $a$, $b$, $c$ si riferiscono alle tre combinazioni di delta di Kronecker in ciascun sottogruppo, anch'esse riportate in tabella.

| | soluzioni | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $B = \alpha,\ C = \beta,\ A = \gamma$ | $D = A + B + C$ | $D = A + B + C - 2N$ | $D = 2N - (A + B + C)$ |
| | $B = \alpha,\ C = \gamma,\ A = \beta$ | $D = A + B + C$ | $D = A + B + C - 2N$ | $D = 2N - (A + B + C)$ |
| | $B = \beta,\ C = \alpha,\ A = \gamma$ | $D = A + B + C$ | $D = A + B + C - 2N$ | $D = 2N - (A + B + C)$ |
| | $B = \beta,\ C = \gamma,\ A = \alpha$ | $D = A + B + C$ | $D = A + B + C - 2N$ | $D = 2N - (A + B + C)$ |
| | $B = \gamma,\ C = \beta,\ A = \alpha$ | $D = A + B + C$ | $D = A + B + C - 2N$ | $D = 2N - (A + B + C)$ |
| | $B = \gamma,\ C = \alpha,\ A = \beta$ | $D = A + B + C$ | $D = A + B + C - 2N$ | $D = 2N - (A + B + C)$ |
| | | $\delta_{A+B+C,\,D}$ | $\delta_{A+B+C,\,D+2N}$ | $\delta_{A+B+C+D,\,2N}$ |
| | | $\delta_{\alpha+\beta+\gamma,\,\delta}\,\delta_{D,\delta}$ | $\delta_{\alpha+\beta+\gamma,\,\delta+2N}\,\delta_{D,\delta}$ | $\delta_{\alpha+\beta+\gamma+\delta,\,2N}\,\delta_{D,\delta}$ |
| 2 | $B = \beta,\ \alpha = C,\ A = \gamma$ | $D = C - A - B$ | $D = A + B - C$ | $D = 2N - (A + B - C)$ |
| | $B = \gamma,\ \alpha = C,\ A = \beta$ | $D = C - A - B$ | $D = A + B - C$ | $D = 2N - (A + B - C)$ |
| | | $\delta_{A+B+D,\,C}$ | $\delta_{A+B,\,C+D}$ | $\delta_{A+B+D,\,C+2N}$ |
| | | $\delta_{\beta+\gamma+\delta,\,\alpha}\,\delta_{D,\delta}$ | $\delta_{\alpha+\delta,\,\beta+\gamma}\,\delta_{D,\delta}$ | $\delta_{\beta+\gamma+\delta,\,\alpha+2N}\,\delta_{D,\delta}$ |
| 3 | $\alpha = B,\ \beta = C,\ A = \gamma$ | $D = A - B - C$ | $D = B + C - A$ | $D = A - B - C + 2N$ |
| | $\alpha = C,\ \beta = B,\ A = \gamma$ | $D = A - B - C$ | $D = B + C - A$ | $D = A - B - C + 2N$ |
| | | $\delta_{B+C+D,\,A}$ | $\delta_{A+D,\,B+C}$ | $\delta_{B+C+D,\,A+2N}$ |
| | | $\delta_{\alpha+\beta+\delta,\,\gamma}\,\delta_{D,\delta}$ | $\delta_{\alpha+\beta,\,\gamma+\delta}\,\delta_{D,\delta}$ | $\delta_{\alpha+\beta+\delta,\,\gamma+2N}\,\delta_{D,\delta}$ |

Si osserva che le espressioni riportate per l'indice $D$, scritto in funzione degli altri indici $A$, $B$, $C$, sono tutte accettabili.[2] Questo è l'ultimo controllo da eseguire sull'accettabilità degli indici: le combinazioni riportate in tabella sono tutte e sole le combinazioni in grado di fornire contributo non nullo alla media.

Nella Sezione 4.8 ci si riferirà ai risultati riassunti in questa tabella per scrivere esplicitamente i termini dello sviluppo di Poisson che - essendo stati ricondotti all'equazione (4.8a) appena studiata - danno contributo non nullo alla media. Prima di fare ciò, nella prossima Sezione si completa lo studio dell'ultima equazione non ancora analizzata, per capire se anch'essa conduce a termini di contributo non nullo.

## 4.7 Sesta equazione

La sesta equazione (4.8b): $\omega_A + \omega_B + \omega_\alpha - \omega_C - \omega_\beta - \omega_\gamma = 0$ conduce alle stesse equazioni algebriche della (4.8a) appena studiata, tra le quali - come già visto - solo tre sono effettivamente utili. Anche in questo caso le soluzioni differiscono dalle precedenti solo per il modo in cui vengono riportate agli indici originali.

$$v = e^{i\frac{\pi B}{2N}} \qquad w = e^{i\frac{\pi\alpha}{2N}} \qquad x = e^{i\frac{\pi C}{2N}} \qquad y = e^{i\frac{\pi\beta}{2N}} \qquad z = e^{i\frac{\pi\gamma}{2N}}$$

1. $\mathcal{F}(v,\, w,\, x,\, y,\, z) = \left(\frac{xyz}{vw} - \frac{vw}{xyz}\right)$ ha soluzioni:
   (a) $v = x, \quad w = y, \quad z$ qualunque $\quad\Rightarrow\quad B = C, \quad \alpha = \beta, \quad \gamma$ qualunque
   (b) tutte le permutazioni di $x$, $y$, $z$ $\quad\Rightarrow\quad$ tutte le permutazioni di $C$, $\beta$, $\gamma$

[2] Le espressioni si intendono accettabili quando esistono valori di $A$, $B$, $C$ tali per cui l'indice $D$ assume un valore compreso tra 1 ed $N - 1$. Non si ha la garanzia che *tutti* i valori di $A$, $B$, $C$ diano un valore per $D$ compreso nel range: il fattore $\delta(A, \ldots, D)$ garantirà che eventuali combinazioni con $D \neq 1 \ldots N - 1$ siano escluse.

2. $\mathcal{F}(v,\, w,\, x,\, y,\, z) = \left(\frac{wyz}{vx} - \frac{vx}{wyz}\right)$ ha soluzioni:

   (a) $v = y, \quad x = w, \quad z$ qualunque $\quad \Rightarrow \quad B = \beta, \quad C = \alpha, \quad \gamma$ qualunque

   (b) $v = z, \quad x = w, \quad y$ qualunque $\quad \Rightarrow \quad B = \gamma, \quad C = \alpha, \quad \beta$ qualunque

3. $\mathcal{F}(v,\, w,\, x,\, y,\, z) = \left(\frac{vwz}{xy} - \frac{xy}{vwz}\right)$ ha soluzioni:

   (a) $x = v, \quad y = w, \quad z$ qualunque $\quad \Rightarrow \quad C = B, \quad \beta = \alpha, \quad \gamma$ qualunque

   (b) $x = w, \quad y = v, \quad z$ qualunque $\quad \Rightarrow \quad C = \alpha, \quad \beta = B, \quad \gamma$ qualunque

Vale di nuovo l'osservazione riportata in precedenza: le tre equazioni si presentano solo in corrispondenza di specifiche sostituzioni per l'indice $A$, che si verificano solo con opportune combinazioni di delta di Kronecker:

Tabella 4.3: Combinazioni utili di delta di Kronecker.

| | | | |
|---|---|---|---|
| equazione | $\mathcal{F}(v,\, w,\, x,\, y,\, z) = \left(\frac{xyz}{vw} - \frac{vw}{xyz}\right)$ | $\mathcal{F}(v,\, w,\, x,\, y,\, z) = \left(\frac{wyz}{vx} - \frac{vx}{wyz}\right)$ | $\mathcal{F}(v,\, w,\, x,\, y,\, z) = \left(\frac{vwz}{xy} - \frac{xy}{vwz}\right)$ |
| sostituzione | $A = C + B + \gamma - (\beta + \alpha)$ | $A = \alpha + \beta + \gamma - (B + C)$ | $A = B + \alpha + \gamma - (C + \beta)$ |
| ottenibile da | $\delta_{A+B+D,\, C}\, \delta_{\beta+\gamma+\delta,\, \alpha}\, \delta_{D,\delta}$<br>$\delta_{A+B,\, C+D}\, \delta_{\alpha+\delta,\, \beta+\gamma}\, \delta_{D,\delta}$<br>$\delta_{A+B+D,\, C+2N}\, \delta_{\beta+\gamma+\delta,\, \alpha+2N}\, \delta_{D,\delta}$ | $\delta_{A+B+C,\, D}\, \delta_{\alpha+\beta+\gamma,\, \delta}\, \delta_{D,\delta}$<br>$\delta_{A+B+C,\, D+2N}\, \delta_{\alpha+\beta+\gamma,\, \delta+2N}\, \delta_{D,\delta}$<br>$\delta_{A+B+C+D,\, 2N}\, \delta_{\alpha+\beta+\gamma+\delta,\, 2N}\, \delta_{D,\delta}$ | $\delta_{A+C+D,\, B}\, \delta_{\alpha+\gamma+\delta,\, \beta}\, \delta_{D,\delta}$<br>$\delta_{A+C,\, B+D}\, \delta_{\alpha+\gamma,\, \beta+\delta}\, \delta_{D,\delta}$<br>$\delta_{A+C+D,\, B+2N}\, \delta_{\alpha+\gamma+\delta,\, \beta+2N}\, \delta_{D,\delta}$ |

Valgono anche qui osservazioni analoghe a quelle riportate nella Sezione precedente. Quelle appena elencate sono le sole combinazioni di delta di Kronecker in corrispondenza delle quali l'equazione (4.8b) presenta soluzioni accettabili. Solo in loro presenza dunque, i termini risultanti dallo sviluppo di Poisson $\{H_4 - \langle H_4 \rangle\,,\, G_1\}$ associati tale equazione danno contributo non nullo alla media. Anche in questo caso si vanno a sostituire le soluzioni trovate nelle espressioni per l'indice $A$ (comune all'interno di ciascun sottogruppo 1, 2, 3 e sempre accettabile) e per l'indice $D$ (che distingue le combinazioni $a$, $b$, $c$ in ciascun sottogruppo e la cui accettabilità va studiata). Come in precedenza, si riassumono nella tabella 4.4 tutte le combinazioni di indici che possono portare a contributo non nullo dopo la media.

In questo caso, alcune delle espressioni ottenute per l'indice $D$ non sono accettabili, dato che nel caso in esame gli indici sono sempre numeri naturali compresi tra 1 ed $N - 1$. Tali situazioni sono state contrassegnate dal simbolo †. In seguito sarà inoltre necessario richiamare la differenza tra i selettori $\Delta_4$ e $\Delta_4'$, che si distinguono per il fatto che alcune combinazioni di delta di Kronecker compaiono solo nel primo selettore e non nel secondo, come riportato nella definizione di $\Delta_4'$ a pag. 11. In particolare, con riferimento alla tabella 4.4, si segnala che tali combinazioni compaiono nel blocco 1- colonna b e del blocco 3 - colonna b: in fase di ricostruzione del risultato finale, si dovrà quindi verificare di volta in volta se tali combinazioni si presentano o meno.

## 4.8 Ricostruzione del risultato finale

Dallo studio riportato finora è emerso che il termine al secondo ordine della forma normale (4.1), obiettivo dei calcoli in questo Capitolo, è dato dalla media di un polinomio di grado 4 nelle variabili $z$, $z^*$, i cui termini effettivamente utili sono solo quelli che una volta mediati danno contributo non nullo. Tali termini si trovano tra quelli risultanti dalle parentesi di Poisson (riportati nella Sezione 2.1), selezionando solo quelli associati alle equazioni (4.8a) e (4.8b) appena studiate. Li si elenca di seguito, riportando inoltre alcuni dei coefficienti che erano stati trascurati durante il calcolo della media:

Tabella 4.4: Combinazioni di indici ammesse per i termini dello sviluppo di Poisson associati all'equazione (4.8b). I numeri 1, 2, 3 fanno riferimento ai tre sottogruppi individuati nel testo. Le lettere $a$, $b$, $c$ si riferiscono alle tre combinazioni di delta di Kronecker in ciascun sottogruppo. Le soluzioni contrassegnate da † non sono accettabili.

| | soluzioni | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $B = C,\ \alpha = \beta,\ A = \gamma$ | $\dagger D = -A$ | $D = A$ | $\dagger D = 2N - A$ |
| | $B = C,\ \alpha = \gamma,\ A = \beta$ | $\dagger D = -A$ | $D = A$ | $\dagger D = 2N - A$ |
| | $B = \beta,\ \alpha = C,\ A = \gamma$ | $D = C - A - B$ | $D = A + B - C$ | $D = 2N - (A + B - C)$ |
| | $B = \beta,\ \alpha = \gamma,\ A = C$ | $\dagger D = -B$ | $D = B$ | $\dagger D = 2N - B$ |
| | $B = \gamma,\ \alpha = \beta,\ A = C$ | $\dagger D = -B$ | $D = B$ | $\dagger D = 2N - B$ |
| | $B = \gamma,\ \alpha = C,\ A = \beta$ | $D = C - A - B$ | $D = A + B - C$ | $D = 2N - (A + B - C)$ |
| | | $\delta_{A+B+D,\,C}$ | $\delta_{A+B,\,C+D}$ | $\delta_{A+B+D,\,C+2N}$ |
| | | $\delta_{\beta+\gamma+\delta,\,\alpha}\,\delta_{D,\delta}$ | $\delta_{\alpha+\delta,\,\beta+\gamma}\,\delta_{D,\delta}$ | $\delta_{\beta+\gamma+\delta,\,\alpha+2N}\,\delta_{D,\delta}$ |
| 2 | $B = \beta,\ C = \alpha,\ A = \gamma$ | $D = A + B + C$ | $D = A + B + C - 2N$ | $D = 2N - (A + B + C)$ |
| | $B = \gamma,\ C = \alpha,\ A = \beta$ | $D = A + B + C$ | $D = A + B + C - 2N$ | $D = 2N - (A + B + C)$ |
| | | $\delta_{A+B+C,\,D}$ | $\delta_{A+B+C,\,D+2N}$ | $\delta_{A+B+C+D,\,2N}$ |
| | | $\delta_{\alpha+\beta+\gamma,\,\delta}\,\delta_{D,\delta}$ | $\delta_{\alpha+\beta+\gamma,\,\delta+2N}\,\delta_{D,\delta}$ | $\delta_{\alpha+\beta+\gamma+\delta,\,2N}\,\delta_{D,\delta}$ |
| 3 | $C = B,\ \beta = \alpha,\ A = \gamma$ | $\dagger D = -A$ | $D = A$ | $\dagger D = 2N - A$ |
| | $C = \alpha,\ \beta = B,\ A = \gamma$ | $D = B - A - C$ | $D = A + C - B$ | $D = 2N - (A + C - B)$ |
| | | $\delta_{A+C+D,\,B}$ | $\delta_{A+C,\,B+D}$ | $\delta_{A+C+D,\,B+2N}$ |
| | | $\delta_{\alpha+\gamma+\delta,\,\beta}\,\delta_{D,\delta}$ | $\delta_{\alpha+\gamma,\,\beta+\delta}\,\delta_{D,\delta}$ | $\delta_{\alpha+\gamma+\delta,\,\beta+2N}\,\delta_{D,\delta}$ |

- ◇ termini associati all'equazione (4.8a)

$$+16\,(1\cdot 1)(-i)\,\delta_{k_1,\,j_1}\frac{z_{k_2}z_{k_3}z_{k_4}z^*_{j_2}z^*_{j_3}z^*_{j_4}}{-i(-\omega_{j_1}-\omega_{j_2}-\omega_{j_3}-\omega_{j_4})}\quad\to -16\,\delta_{\delta,\,D}\frac{z_\alpha z_\beta z_\gamma z^*_A z^*_B z^*_C}{(\omega_D+\omega_A+\omega_B+\omega_C)} \tag{4.9a}$$

$$-16\,(1\cdot 1)(-i)\,\delta_{k_1,\,j_1}\frac{z^*_{k_2}z^*_{k_3}z^*_{k_4}z_{j_2}z_{j_3}z_{j_4}}{-i(\omega_{j_1}+\omega_{j_2}+\omega_{j_3}+\omega_{j_4})}\quad\to -16\,\delta_{\delta,\,D}\frac{z^*_\alpha z^*_\beta z^*_\gamma z_A z_B z_C}{(\omega_D+\omega_A+\omega_B+\omega_C)} \tag{4.9b}$$

$$-1\,(4\cdot 4)(-i)\,\delta_{k_1,\,j_4}\frac{z_{k_2}z_{k_3}z_{k_4}z^*_{j_1}z^*_{j_2}z^*_{j_3}}{-i(-\omega_{j_1}-\omega_{j_2}-\omega_{j_3}+\omega_{j_4})}\quad\to -16\,\delta_{\delta,\,D}\frac{z_\alpha z_\beta z_\gamma z^*_A z^*_B z^*_C}{(\omega_D-\omega_A-\omega_B-\omega_C)} \tag{4.9c}$$

$$1\,(4\cdot 4)(-i)\,\delta_{k_4,\,j_1}\frac{z^*_{k_1}z^*_{k_2}z^*_{k_3}z_{j_2}z_{j_3}z_{j_4}}{-i(-\omega_{j_1}+\omega_{j_2}+\omega_{j_3}+\omega_{j_4})}\quad\to -16\,\delta_{\delta,\,D}\frac{z^*_\alpha z^*_\beta z^*_\gamma z_A z_B z_C}{(\omega_D-\omega_A-\omega_B-\omega_C)} \tag{4.9d}$$

- ◇ termini associati all'equazione (4.8b)

$$9\,(4\cdot 4)(-i)\,\delta_{k_2,\,j_1}\frac{z^*_{k_1}z^*_{j_2}z^*_{j_3}z_{k_3}z_{k_4}z_{j_4}}{-i(-\omega_{j_1}-\omega_{j_2}-\omega_{j_3}+\omega_{j_4})}\quad\to -16\cdot 9\,\delta_{\delta,\,D}\frac{z^*_\alpha z^*_A z^*_B z_\beta z_\gamma z_C}{(\omega_D+\omega_A+\omega_B-\omega_C)} \tag{4.10a}$$

$$-9\,(4\cdot 4)(-i)\,\delta_{k_1,\,j_2}\frac{z^*_{k_2}z^*_{k_3}z^*_{j_1}z_{k_4}z_{j_3}z_{j_4}}{-i(-\omega_{j_1}+\omega_{j_2}+\omega_{j_3}+\omega_{j_4})}\quad\to -16\cdot 9\,\delta_{\delta,\,D}\frac{z^*_\beta z^*_\gamma z^*_C z_\alpha z_A z_B}{(\omega_D+\omega_A+\omega_B-\omega_C)} \tag{4.10b}$$

$$4\,(6\cdot 6)(-i)\,\delta_{k_3,\,j_1}\frac{z^*_{k_1}z^*_{k_2}z^*_{j_2}z_{k_4}z_{j_3}z_{j_4}}{-i(-\omega_{j_1}-\omega_{j_2}+\omega_{j_3}+\omega_{j_4})}\quad\to 16\cdot 9\,\delta_{\delta,\,D}\frac{z^*_\beta z^*_\gamma z^*_C z_\alpha z_A z_B}{(\omega_A+\omega_B-\omega_C-\omega_D)} \tag{4.10c}$$

$$-4\,(6\cdot 6)(-i)\,\delta_{k_1,\,j_3}\frac{z^*_{k_2}z^*_{j_1}z^*_{j_2}z_{k_3}z_{k_4}z_{j_4}}{-i(-\omega_{j_1}-\omega_{j_2}+\omega_{j_3}+\omega_{j_4})}\quad\to 16\cdot 9\,\delta_{\delta,\,D}\frac{z^*_\alpha z^*_A z^*_B z_\beta z_\gamma z_C}{(\omega_A+\omega_B-\omega_C-\omega_D)} \tag{4.10d}$$

Per ciascun termine sono stati riportati i seguenti fattori:

- ◇ primo fattore numerico: risulta dallo sviluppo delle parentesi di Poisson

- ◇ due fattori numerici in parentesi: ciascuno moltiplicava un operando nelle parentesi di Poisson; provengono dallo sviluppo di $(z+z^*)^4$

- ◇ $-i$, a numeratore: viene dallo sviluppo delle parentesi di Poisson in variabili di Birkhoff: $\{X,\,Y\}_{Birk} = -i\{X,\,Y\}_{std}$

- ◇ denominatore: risulta dall'operando di destra nelle parentesi di Poisson, proveniente da $G_1$; comprende un fattore $-i$ che si semplifica con l'analogo a numeratore

Per ciascun termine si sono omessi invece, per comodità di scrittura, i seguenti fattori, comuni a tutti i termini:

- ◇ $\frac{1}{2}\left(\frac{g}{32N}\right)^2$, indipendente dagli indici
- ◇ $\prod_{s=1}^{4}\sqrt{\omega_{k_s}}\sqrt{\omega_{j_s}}$, dipendente dagli indici ma totalmente simmetrico rispetto a qualsiasi loro scambio
- ◇ i fattori $\delta(k_1 \dots k_4)\,\delta(j_1 \dots j_4)$, che compaiono nel modo già descritto nella sezione 4.1

Si noti che i termini (4.9) e i primi due termini tra i (4.10) sono moltiplicati per fattori $\delta(k_1 \dots k_4)$ $\delta(j_1 \dots j_4)$ provenienti dai selettori $\Delta_4$ mentre negli ultimi due termini tra i (4.10) i fattori delta di Kronecker provengono dai selettori $\Delta_4'$ (definiti a pag. 11).
Si noti inoltre come nell'elencare i termini si siano rinominati gli indici, riportandosi alla notazione utilizzata nelle Sezioni precedenti. In questo modo diventa immediato vedere come il primo blocco di termini (4.9) sia associato all'equazione (4.8a) studiata nella Sezione 4.6, mentre il secondo blocco (4.10) è associato all'equazione (4.8b) studiata nella Sezione 4.7.
Si noti infine come i termini elencati, presi a due a due, siano uguali a meno di scambio di $z$, $z^*$.

Si può ora iniziare l'analisi del primo blocco di termini (4.9) (lo studio sarà poi ripetuto in maniera analoga per il blocco (4.10)). Come anticipato, ciascuno dei termini di questo blocco si trova a moltiplicare tutte le possibili combinazioni di delta di Kronecker nella forma $\delta(k_1 \dots k_4)\,\delta(j_1 \dots j_4)$, con $\delta(k_1 \dots k_4)$ e $\delta(j_1 \dots j_4)$ termini del selettore $\Delta_4$. Dato che il blocco di termini in questione è associato all'equazione (4.8a), possiamo sfruttare le informazioni ricavate nella Sezione 4.6 ed affermare che tali termini danno contributo non nullo solo in presenza delle specifiche combinazioni di indici elencate nella tabella 4.2.
E' ora sufficiente considerare ciascun termine del primo blocco e sostituire una per volta tutte le combinazioni di indici ammesse. Il conto è stato fatto per esteso, ottenendo le espressioni finali di ciascuno dei termini che dà contributo non nullo alla media. Si è sfruttato il fatto che in ogni termine gli indici sono muti: rinominandone alcuni, è possibile sommare parte dei risultati. Con questa procedura, la sommatoria iniziale su sei indici si riduce ad una sommatoria su soli tre indici.[3]
Si ottiene così il primo contributo utile al termine al secondo ordine della forma normale:

$$
\begin{aligned}
C_1 = \frac{1}{32}\left(\frac{g}{N}\right)^2 \sum_{A,\,B,\,C,\,D=1}^{N-1} |z_A|^2|z_B|^2|z_C|^2\omega_A\omega_B\omega_C \\
\Bigg[3\,(\delta_{D,\,A+B+C} + \delta_{D,\,2N-(A+B+C)} + \delta_{D,\,A+B+C-2N})\left(\frac{\omega_{A+B+C}}{\omega_A+\omega_B+\omega_C-\omega_{A+B+C}} - \frac{\omega_{A+B+C}}{\omega_A+\omega_B+\omega_C+\omega_{A+B+C}}\right)+ \\
+\,2\,(\delta_{D,\,A+B-C} + \delta_{D,\,-A-B+C} + \delta_{D,\,2N-(A+B-C)})\left(\frac{\omega_{A+B-C}}{\omega_A+\omega_B+\omega_C-\omega_{A+B-C}} - \frac{\omega_{A+B-C}}{\omega_A+\omega_B+\omega_C+\omega_{A+B-C}}\right)\Bigg]
\end{aligned}
$$

Analogamente si procede con i termini del secondo blocco. Con riferimento alla tabella 4.4, si sostituiscono una per volta tutte le combinazioni di indici ammesse. Nel farlo, bisogna fare attenzione al fatto che gli ultimi due termini del blocco sono moltiplicati per fattori $\delta(k_1 \dots k_4)$ e $\delta(j_1 \dots j_4)$ provenienti dai selettori $\Delta_4'$: tra le soluzioni riportate in tabella, si sono selezionate solo quelle che effettivamente si presentano. Dopo aver sostituito le combinazioni di indici ammesse nei termini del secondo blocco, si tiene conto del fatto che gli indici sono muti e si sommano i termini, quando è possibile. Anche in questo caso si ottiene una sommatoria finale su soli tre indici. Si ricava così anche il secondo ed ultimo

[3] Nel risultato riportato, la sommatoria è su quattro indici $A$, $B$, $C$, $D$, tuttavia l'indice $D$ è completamente vincolato dagli altri tre ed è stato mantenuto solo per tenere conto in maniera sintetica del fatto che le espressioni di $D$ come funzione di $A$, $B$, $C$ compaiono effettivamente solo quando il valore risultante è un naturale tra 1 ed $N-1$

contributo al termine di secondo ordine della forma normale:

$$C_2 = \frac{9}{32}\left(\frac{g}{N}\right)^2 \sum_{A,\,B,\,C,\,D=1}^{N-1} |z_A|^2|z_B|^2|z_C|^2\omega_A\omega_B\omega_C\Big[-\frac{5}{4}+$$

$$+\left(\delta_{D,\,A+B+C}+\delta_{D,\,2N-(A+B+C)}+\delta_{D,\,A+B+C-2N}\right)\left(\frac{\omega_{A+B+C}}{\omega_A+\omega_B-\omega_C-\omega_{A+B+C}}-\frac{\omega_{A+B+C}}{\omega_A+\omega_B-\omega_C+\omega_{A+B+C}}\right)\Big]+$$

$$+\frac{9}{32}\left(\frac{g}{N}\right)^2 \sum_{\substack{A,\,B,\,C,\,D=1\\ C\neq A\,\wedge\,C\neq B}}^{N-1} |z_A|^2|z_B|^2|z_C|^2\omega_A\omega_B\omega_C\Big[$$

$$+\quad\left(\delta_{D,\,A+B-C}+\delta_{D,\,-A-B+C}+\delta_{D,\,2N-(A+B-C)}\right)\left(\frac{\omega_{A+B-C}}{\omega_A+\omega_B-\omega_C-\omega_{A+B-C}}-\frac{\omega_{A+B-C}}{\omega_A+\omega_B-\omega_C+\omega_{A+B-C}}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\delta_{D,\,A+C-B}+\delta_{D,\,-A-C+B}+\delta_{D,\,2N-(A+C-B)}\right)\left(\frac{\omega_{A+C-B}}{\omega_A+\omega_B-\omega_C-\omega_{A+C-B}}-\frac{\omega_{A+C-B}}{\omega_A+\omega_B-\omega_C+\omega_{A+C-B}}\right)\Big]+$$

$$+\frac{9}{32}\left(\frac{g}{N}\right)^2 \sum_{\substack{A,\,B,\,D=1\\ B\neq A}}^{N-1} |z_A|^4|z_B|^2\omega_A^2\omega_B\Big[\frac{3}{4}+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\delta_{D,\,2A-B}+\delta_{D,\,-2A+B}+\delta_{D,\,2N-(2A-B)}\right)\left(\frac{\omega_{2A-B}}{\omega_B-\omega_{2A-B}}-\frac{\omega_{2A-B}}{\omega_B+\omega_{2A-B}}\right)\Big]+$$

$$+\frac{9}{64}\left(\frac{g}{N}\right)^2 \sum_{A=1}^{N-1} |z_A|^6\omega_A^3$$

E' ora possibile sommare i due contributi trovati, ottenendo così il termine al secondo ordine dell'Hamiltoniana in forma normale. Si ricorda che nell'elaborato si è deciso di tralasciare lo studio di alcuni termini, che potrebbero fornire un contributo non nullo: tale eventuale contributo viene denominato $K$.

$$\frac{1}{2}\left\langle\left\{H_4-\langle H_4\rangle\,,\,G_1\right\}\right\rangle = K+$$

$$\frac{1}{32}\left(\frac{g}{N}\right)^2 \sum_{A,\,B,\,C,\,D=1}^{N-1} |z_A|^2|z_B|^2|z_C|^2\omega_A\omega_B\omega_C\Big[-\frac{45}{4}+$$

$$3\left(\delta_{D,\,A+B+C}+\delta_{D,\,2N-(A+B+C)}+\delta_{D,\,A+B+C-2N}\right)\left(\frac{\omega_{A+B+C}}{\omega_A+\omega_B+\omega_C-\omega_{A+B+C}}-\frac{\omega_{A+B+C}}{\omega_A+\omega_B+\omega_C+\omega_{A+B+C}}\right)+$$

$$+2\left(\delta_{D,\,A+B-C}+\delta_{D,\,-A-B+C}+\delta_{D,\,2N-(A+B-C)}\right)\left(\frac{\omega_{A+B-C}}{\omega_A+\omega_B+\omega_C-\omega_{A+B-C}}-\frac{\omega_{A+B-C}}{\omega_A+\omega_B+\omega_C+\omega_{A+B-C}}\right)\Big]+$$

$$+9\left(\delta_{D,\,A+B+C}+\delta_{D,\,2N-(A+B+C)}+\delta_{D,\,A+B+C-2N}\right)\left(\frac{\omega_{A+B+C}}{\omega_A+\omega_B-\omega_C-\omega_{A+B+C}}-\frac{\omega_{A+B+C}}{\omega_A+\omega_B-\omega_C+\omega_{A+B+C}}\right)\Big]+$$

$$+\frac{9}{32}\left(\frac{g}{N}\right)^2 \sum_{\substack{A,\,B,\,C,\,D=1\\ C\neq A\,\wedge\,C\neq B}}^{N-1} |z_A|^2|z_B|^2|z_C|^2\omega_A\omega_B\omega_C\Big[$$

$$+\quad\left(\delta_{D,\,A+B-C}+\delta_{D,\,-A-B+C}+\delta_{D,\,2N-(A+B-C)}\right)\left(\frac{\omega_{A+B-C}}{\omega_A+\omega_B-\omega_C-\omega_{A+B-C}}-\frac{\omega_{A+B-C}}{\omega_A+\omega_B-\omega_C+\omega_{A+B-C}}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\delta_{D,\,A+C-B}+\delta_{D,\,-A-C+B}+\delta_{D,\,2N-(A+C-B)}\right)\left(\frac{\omega_{A+C-B}}{\omega_A+\omega_B-\omega_C-\omega_{A+C-B}}-\frac{\omega_{A+C-B}}{\omega_A+\omega_B-\omega_C+\omega_{A+C-B}}\right)\Big]+$$

$$+\frac{9}{32}\left(\frac{g}{N}\right)^2 \sum_{\substack{A,\,B,\,D=1\\ B\neq A}}^{N-1} |z_A|^4|z_B|^2\omega_A^2\omega_B\Big[\frac{3}{4}+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\delta_{D,\,2A-B}+\delta_{D,\,-2A+B}+\delta_{D,\,2N-(2A-B)}\right)\left(\frac{\omega_{2A-B}}{\omega_B-\omega_{2A-B}}-\frac{\omega_{2A-B}}{\omega_B+\omega_{2A-B}}\right)\Big]+$$

$$+\frac{9}{64}\left(\frac{g}{N}\right)^2 \sum_{A=1}^{N-1} |z_A|^6\omega_A^3$$

# Conclusioni

Si è giunti a scrivere la forma normale al secondo ordine per l'Hamiltoniana del sistema in esame. Si ricorda che, come già anticipato nel testo, tale forma normale è incompleta, in quanto mancante di alcuni eventuali contributi, descritti nel testo e tralasciati nello studio. Essa sarebbe dunque equivalente all'Hamiltoniana di partenza solo nel caso in cui tali contributi risultassero effettivamente nulli. Dallo studio della forma normale ottenuta è comunque possibile riportare alcune considerazioni. Si osserva innanzitutto che il termine al primo ordine della forma normale dipende esclusivamente dalle azioni, coerentemente con quanto ci si aspettava: si è dunque verificato che a tale ordine il sistema presenta caratteristiche quasi-periodiche, con angoli che variano a velocità costante ed azioni che fungono da integrali primi per il sistema.
Più interessante è il risultato ottenuto per il termine al secondo ordine. Anche in questo caso la dipendenza è limitata alle azioni, mentre gli angoli non compaiono. Se così non fosse stato, si sarebbe potuto affermare che già al secondo ordine il sistema devia rispetto alla struttura imperturbata quasi-periodica, con energie dei modi normali che - non essendo più esprimibili in funzione di soli integrali primi - iniziano a variare, facendo procedere il sistema verso l'equipartizione. Visto il risultato ottenuto, invece, questa eventualità sembra non presentarsi. Tuttavia, in conseguenza della restrizione posta in questo elaborato, non è possibile affermare con certezza che si verifichi l'altra alternativa, ovvero che anche al secondo ordine le energie dei moti dipendano esclusivamente dalle azioni e che sia necessario descrivere il sistema almeno al terzo ordine per osservare la tendenza all'equipartizione, con conseguente riscalamento di un ordine di grandezza dei tempi necessari per il raggiungimento dell'equilibrio.
E' comunque possibile affermare che, per capire quale delle due alternative si verifica, è sufficiente indagare quei contributi che in questo elaborato sono stati tralasciati, verificando tramite studio numerico l'accettabilità delle soluzioni ad essi associate e poi, in caso di esito positivo, ricostruendo la forma effettiva dei nuovi termini da aggiungere allla forma normale.

# Bibliografia


[1] E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam, *266. -Studies of non linear problems*, Los-Alamos internal report, document LA-1940 (1955). In: *Enrico Fermi Collected Papers*, vol. II, pp. 977-988, University of Chicago Press/Accad. Naz. Lincei, Chicago/Roma (1965)

[2] B. Rink, *Geometry and Dynamics in Hamiltonian Lattices*, PhD thesis, University Utrecht (17 September 2003)

[3] M.D. Bustamante, K. Hutchinson, Y.V. Lvov, M. Onorato, *Exact discrete resonances in the Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou system*, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, vol. 73, pp. 437-471, (2019), Elsevier

[4] A. Henrici, T. Kappeler, *Results on Normal Forms for FPU Chains*, Commun. Math. Phys., vol. 278, pp.145-177 (2008), Springer Verlag

[5] A. Ponno, *Analytical Mechanics*, Lectures Notes 2018/2019, Università degli Studi di Padova

[6] M. Stoppato, *The quantum Fermi Pasta Ulam problem*, Tesi di laurea Magistrale in Fisica, Università degli studi di Padova (2016)